# 機械科学Ｉ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

## 問題１

(1)　位置 $x$ と時刻 $t$ の関数 $u(x, t)$ が以下の偏微分方程式（$D$ は正の定数）を満たす．

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{i}$$

これを，式(ii), (iii)のそれぞれに定義する $u(x,t)$ のフーリエ変換 $U(k,t)$ と，その逆フーリエ変換を用いて解くことを考える．ただし，$k$ を実数とし，虚数単位を $\mathrm{i}\ (=\sqrt{-1})$ と表記する．

$$U(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\exp(-2\pi\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \tag{ii}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)\exp(2\pi\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}k \tag{iii}$$

時刻 $t=0$ において $u(x,0)=u_0(x)$,　$U(k,0)=U_0(k)$ とし，$u_0(x)$ は次の正規分布関数（$\sigma$ は正の定数）として与える．

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{iv}$$

解答において，次のガウス積分を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-Ax^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \tag{v}$$

ここで，$A$ は正の定数である．以下の問に答えよ．

(a)　式(iii)を式(i)に代入し，$U(k,t)$ が満たす偏微分方程式を導け．

(b)　前問(a)の偏微分方程式を解き，$U_0(k)$ を用いて $U(k,t)$ を示せ．

(c)　$u_0(x)$ のフーリエ変換である $U_0(k)$ を求めよ．

(d)　問(b), (c) の結果を利用して，$U_0(k)$ を用いずに $U(k,t)$ を示せ．

(e)　$U(k,t)$ を逆フーリエ変換して $u(x,t)$ を求め，それが $x$ の正規分布関数となることを示せ．

(f)　$u(x,t)$ と $u_0(x)$ の関数の形を比較して，時間の経過による $u(x,t)$ の変化の特徴を述べよ．

(2)　ある種の機械製品の時刻 $t$ における単位時間あたりに故障する確率（故障率）を調べたところ $s(t)$ であった．このとき以下の問に答えよ．

(a)　この機械製品が時刻 0 で運転を開始してから，時刻 $t$ までの間に故障する確率を $F(t)$ とするとき，この機械製品が時刻 $t$ に至るまでに故障しない確率 $R(t)$ を $F(t)$ を用いて表せ．

(b)　$R(t)$ の時間変化率 $\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$ を $R(t)$ と $s(t)$ を用いて表せ．

(c)　$s(t)$ が $t$ に依存せず，$s_0$ を定数として $s(t)=s_0$ であるとき，$R(t)$ を $s_0$ を用いて表せ．

(d)　$s(t)$ が $t$ に依存せず，$s_0$ を定数として $s(t)=s_0$ であるとき，この機械製品の平均寿命（故障するまでの平均時間）を $s_0$ を用いて表せ．

## 問題２

図 2(a)に示すように，長さが $2L$ の細長い一様なはりを考え，断面中心を通る $x$ 軸を定義する．このはりに対して，端点 A（$x = 0$），中点 C（$x = L$）を単純支持し，AC 間に単位長さあたり $w$ の等分布荷重を，点 B（$x = 2L$）に集中荷重 $P$ を作用させる．はりのヤング率を $E$，断面二次モーメントを $I$ として，以下の問に答えよ．ただし，はりの自重およびせん断力による変形は無視できるものとする．

(1) 端点 A および中点 C に生じる支持反力をそれぞれ求めよ．
(2) AC 間および CB 間に生じる曲げモーメントをそれぞれ求めよ．
(3) 端点 B におけるたわみを求めよ．
(4) 端点 B のたわみがゼロとなるとき，$P$ を $w$ と $L$ を用いて示せ．

次に，図 2(b)に示すように，このはりの端点 A を単純支持から固定支持に変更する．ここで，端点 A および中点 C に生じる支持反力をそれぞれ $R_A$，$R_C$ とし，端点 A に生じる反モーメントを $M_A$ とする．
(5) 力のつり合い式と，端点 A におけるモーメントのつり合い式をそれぞれ示せ．
(6) 支持反力 $R_A$，$R_C$ および反モーメント $M_A$ を，$w$，$L$，$P$ を用いてそれぞれ示せ．
(7) 端点 B のたわみがゼロとなるとき，$P$ を $w$ と $L$ を用いて示せ．さらに，この $P$ と問(4)の $P$ とどちらが大きいかを示し，その理由を述べよ．

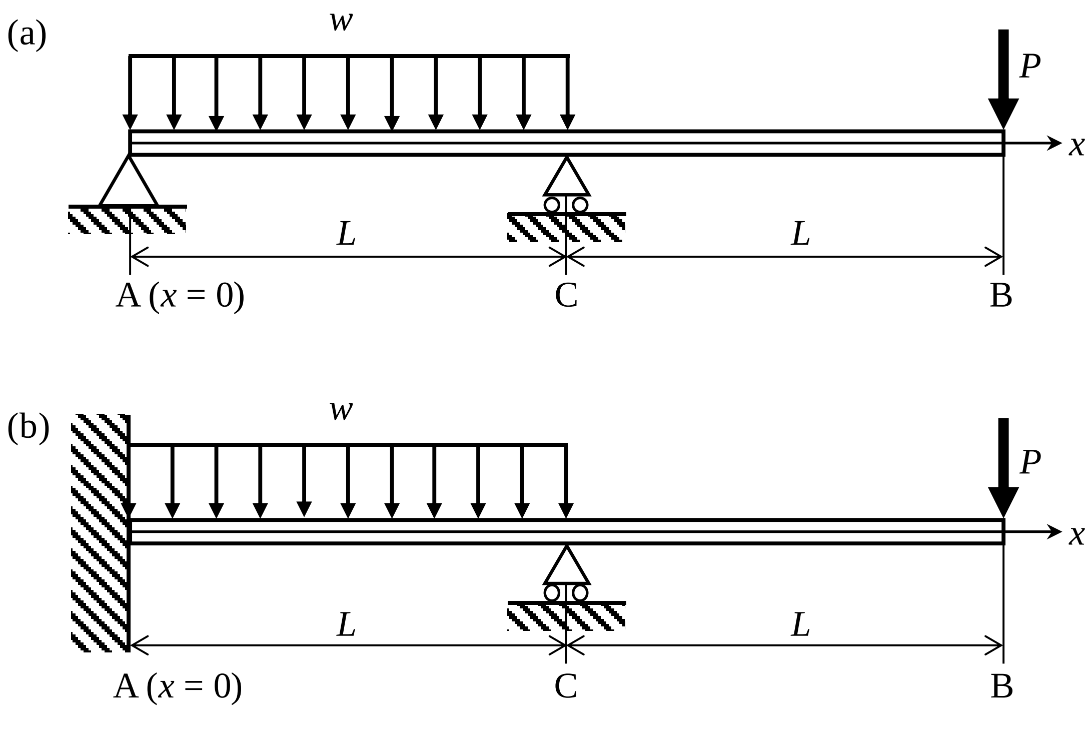


図 2

# 問題３

(1) 図 3-1 に示すように，十分に大きなタンクから一定密度 $\rho$ の非圧縮流体がスプリンクラー S に流れ込む．図 3-1 に示す鉛直の回転軸まわりに，S はなめらかに回転できる．S を鉛直上方から見た様子を図 3-2 に示す．S の 2 本のノズルは同一形状であり，S の回転軸から距離 $L$ の位置で 120 度曲がり，その位置からノズル出口までの距離も $L$ である．また，ノズルの断面積は $A$ である．図 3-1 に示すように，高さの基準面からのタンク内の液面の高さを $h_1$，S のノズルの高さを $h_2$（$< h_1$）とする．流体の粘性の影響は無視してよく，管路の流速は断面内で一様であり，また，S に管路から流入する流体の角運動量は無視できる．重力加速度の大きさを $g$ とする．

まず，S が回転しないように S に力を加える．このとき，以下の問に答えよ．

(a) S のノズルから流出する流体の速度の大きさ $U$ を $g$，$h_1$，$h_2$ を用いて表せ．

(b) S のノズル出口における，単位体積あたりの流体の角運動量の鉛直成分を $L$，$U$，$\rho$ を用いて表せ．ただし，角運動量は図 3-1 および図 3-2 に示す点 O を原点とする位置ベクトルを用いて定義し，鉛直上向きを正とする．

(c) 図 3-1 および図 3-2 に示す検査体積 $V_1$ における流体の角運動量を考え，S が回転しないように加えた回転軸まわりのトルクの大きさを $A$，$g$，$h_1$，$h_2$，$L$，$\rho$ を用いて表せ．

(d) S が回転しないように加えた力を取り除くと，S は回転を始める．このとき，鉛直上方から見た S の回転方向は，時計回りあるいは反時計回りのいずれになるかを理由をつけて述べよ．

(2) (1) の S が回転しないように S に加えていた力を取り除いたのち十分に時間がたつと，S は一定の角速度で回転する．このとき，以下の問に答えよ．

(e) S のノズルから流出する流体の，ノズル出口に対する相対速度の大きさを $U'$ と表す．S の角速度の大きさを $L$ と $U'$ を用いて表せ．ただし，S は摩擦力などを受けず，なめらかに回転することに留意せよ．

(f) $U'$ を $g$，$h_1$，$h_2$ を用いて表せ．

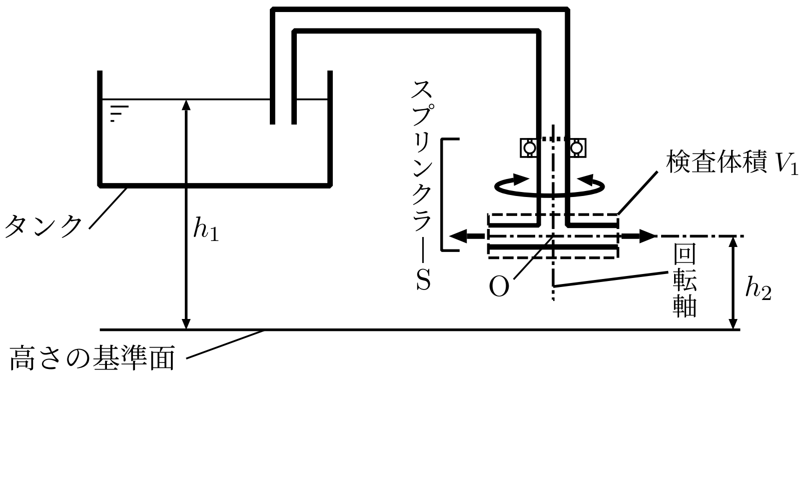


図 3-1

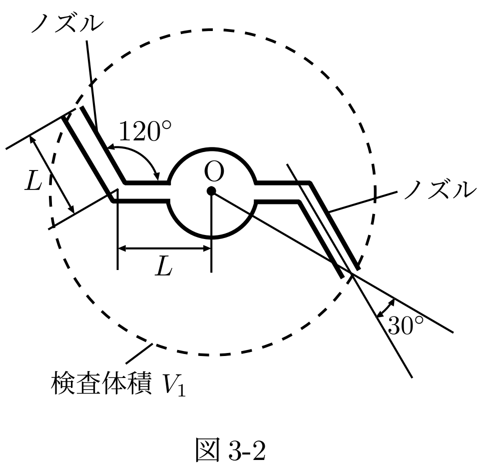


図 3-2

(次ページに続く)

# 問題３の続き

S の角速度を $\boldsymbol{\Omega}$ と表すと，S とともに回転する座標系では，単位体積あたりの流体に遠心力 $\boldsymbol{f}_{\rm ce} = -\rho\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})$ とコリオリ力 $\boldsymbol{f}_{\rm co} = -2\rho\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u}$ が作用する．ここで，$\boldsymbol{u}$ はこの回転系での流体の速度であり，$\boldsymbol{x}$ は図 3-1 および図 3-2 に示す点 O を原点とする位置ベクトルである．$\boldsymbol{\Omega}$ で回転する座標系における検査体積 $V_1$ 中の流体の角運動量を考え，以下の問に答えよ．

(g) 遠心力のモーメント $\displaystyle\int_{V_1} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}_{\rm ce}\,dV$ の鉛直成分を求めよ．

(h) 流体が S から受ける力が座標系によらないことに留意し，コリオリ力のモーメント $\displaystyle\int_{V_1} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}_{\rm co}\,dV$ の鉛直成分を $A$，$L$，$U'$，$\rho$ を用いて表せ．

(3) 次に，図 3-1 に示す S を十分に大きなタンク内の流体中に入れ，再び，S が回転しないように S に力を加える．図 3-3 に示すように，S の入ったタンクをもう一方のタンクよりも高い位置に置くと，図 3-4 に示す向きに流体が S に流れ込む．ここで，図 3-4 は，S を鉛直上方から見た図であり，図 3-5 は，図 3-4 の実線で囲まれた四角部分の拡大図である．ただし，以下では，S のノズルの曲がりの影響により，ノズル内の流速には図 3-5 に示すような非一様な分布が生じるとする．以下の問に答えよ．

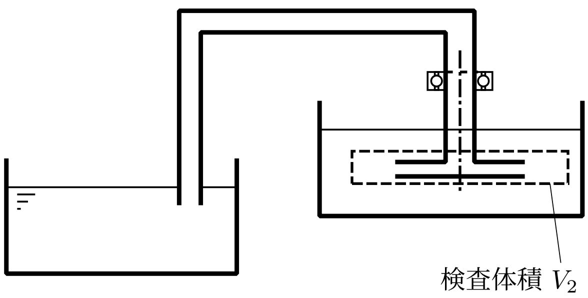


図 3-3

(i) 図 3-5 に示す断面 C における流体の速度は $x$ 成分 $w$ のみをもち，

$$w(x_c, y, z) = -w_0(1 + y/r) \quad (-r \le y \le r,\ -r \le z \le r)$$

と表されるものとする．ここで，$w_0$ は定数，ノズルの断面は一辺の長さが $2r$ の正方形とする．また，座標系 $(x, y, z)$ は，図 3-5 に示すように定義し，断面 C の $x$ 座標を $x_c$ とする．図 3-4 に示す検査体積 $V_2$ から，断面 C を通って流出する流体の，単位時間あたりの角運動量の $z$ 成分を $r$，$w_0$，$\rho$ を用いて表せ．

(j) S が回転しないように加えた力を取り除く．$V_2$ 内の流体の角運動量を考え，(i) で求めた角運動量の流出により，S は鉛直上方から見て，時計回りあるいは反時計回りのいずれに回転しようとするかを，理由をつけて述べよ．ただし，S のそれぞれのノズルから流出する流体の角運動量は等しく，また，$V_2$ の外周部から $V_2$ に流入する流体の角運動量は無視できる．

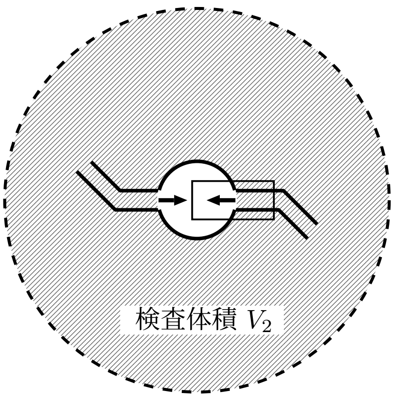


図 3-4

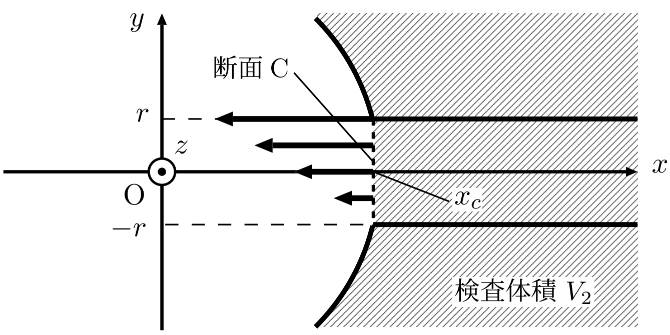


図 3-5