

生体システム工学Ⅱ

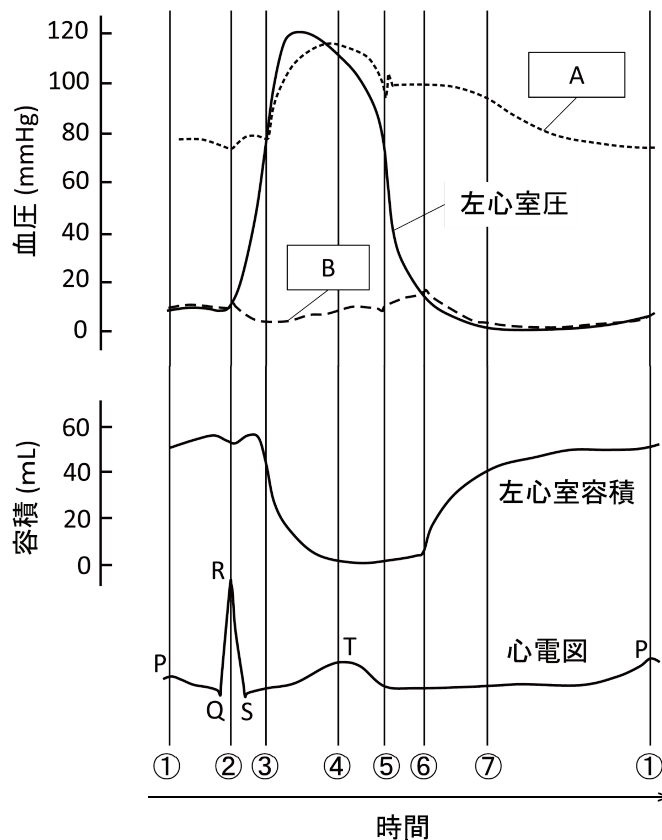
次の[Ⅱ - 1]～[Ⅱ - 3]の 3 題を、それぞれ別の解答用紙に答えよ。

[Ⅱ - 1]

心循環系に関する以下の問いに答えよ。

下図は、1 心拍中のヒト左心室の血圧と容積の時間変化並びに心電図を示したものである。

- (問 1) 心電図の P 波と R 波はそれぞれ心臓のどの部分のどのような電気的な状態に対応するか答えよ。
- (問 2) 破線 A および B はどこの血圧を表すか。以下の中から選び、又理由を述べよ。
右心室, 左心房, 大動脈, 大静脈
- (問 3) この被験者の最高血圧値および最低血圧値を読み取って記せ。
- (問 4) 図中の②③間で左心室の血圧および容積変化が図のようになる理由を述べよ。
- (問 5) 左心室の圧容積関係の概略図 (PV 図) を描き、その図中に②③④⑥に対応する点を示せ。
- (問 6) 1 心拍で左心室が血液に対して行う仕事の概算値を求めよ。
ただし、水銀の密度は $13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、重力加速度の大きさは 9.8 m/s^2 とする。



図

[Ⅱ - 2]

(問 1) 図 1 のように質量 m の 3 個の質点が同一直線上に水平に配置され、バネ定数 k のバネでつながれており、両端のバネの一端が壁に固定されている系を考える。各質点のつり合いの位置からの変位を u_1, u_2, u_3 とする。また、バネの質量、摩擦、および重力の効果は無視できるものとする。各質点の水平方向の微小振動について、以下の問いに答えよ。

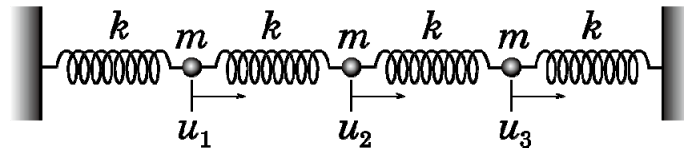


図 1

(ア) 時刻を t として、 u_1, u_2, u_3 が従う運動方程式を書け。

(イ) この系の基準振動解として、

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi), \quad u_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi), \quad u_3(t) = A_3 \cos(\omega t + \phi)$$

を仮定し、基準振動の振動数 ω をすべて求めよ。ここで、 ϕ は初期位相を表す定数である。

(ウ) (イ) で求めた基準振動の振動数のそれぞれに対して、振幅の比 $A_1 : A_2 : A_3$ を求めよ。さらに、基準振動の振幅を $A_i = \sin(\alpha_i)$ の形で表すとき ($i = 1, 2, 3$)、それぞれの基準振動における α を求めよ。

(エ) $t = 0$ における初期条件として、 $u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = A_0 > 0$ とし、すべての質点の初速度を 0 とする。このときの u_1, u_2, u_3 の時間発展を求めよ。

(次のページに続く)

- (問 2) 図 2 のように質量 m の N 個の質点が同一直線上に水平に配置され、バネ定数 k のバネでつながれており、両端のバネの一端が壁に固定されている系を考える。各質点のつり合いの位置からの変位を u_1, u_2, \dots, u_N とする。また、バネの質量、摩擦、および重力の効果は無視できるものとする。各質点の水平方向の微小振動について、以下の問いに答えよ。

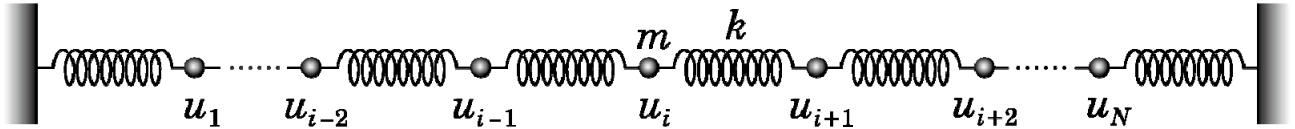


図 2

- (ア) u_1, u_i ($1 < i < N$), および u_N が従う運動方程式を書け。

- (イ) この系の基準振動について考える。基準振動解として、

$$u_i = \sin(\alpha i) \cos(\omega t + \phi)$$

を仮定し、各基準振動の ω , および α をすべて求めよ。ここで、 ϕ は初期位相を表す定数である。

- (ウ) つり合いの位置において、隣り合う質点間の距離を l とする。(ア) で求めた u_i の運動方程式において、 $\frac{m}{l} = \sigma$ および $kl = e$ を一定に保ちながら、 $l \rightarrow 0$ の極限を考えることで、1次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

を導け。ここで、 c は定数である。 x はつり合いの位置であり、左の壁からの位置 $x = li$ を表わす。また、 $u(x, t)$ は位置 x における時刻 t での変位を表わし、壁の間の距離は一定に保たれているとする。

[Ⅱ - 3]

実数値をとる時間 t に関する連続時間信号 $x(t)$ およびそれを一定の時間間隔 τ_s でサンプリングした離散時間信号 $x[n] \equiv x(n\tau_s)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を考える. このとき, ナイキスト角周波数は $\Omega_s = \frac{\pi}{\tau_s}$ であり, $\tau_s = \frac{\pi}{\Omega_s}$ となる. さらに, $x(t)$ は角周波数の帯域幅が $[-\Omega, \Omega]$ である有限帯域信号とする.

すなわち,

$$F[x(t)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \equiv X(\omega) \quad (1)$$

としたとき, $|\omega| > \Omega$ に対して $X(\omega) = 0$ である. ここで, $F[\cdot]$ はフーリエ変換を表す. さらに, Ω はシャノンのサンプリング定理に基づいてサンプル値系列 $x[n]$ から原信号 $x(t)$ が再構成できるための条件 $\Omega \leq \Omega_s$ を満たすものとする. さて, 逆フーリエ変換を用いることで,

$$x(t) = F^{-1}[X(\omega)] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{\Omega_s} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

と表される. $X(\omega)$ の有限帯域性により, 周波数の関数である $X(\omega)$ は, ω に関して周期 $2\Omega_s$ の周期信号とみなすことができるので, フーリエ級数展開を用いて,

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{2\Omega_s}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\tau_s\omega}$$

$$c_n = \frac{1}{2\Omega_s} \int_{-\frac{2\Omega_s}{2}}^{\frac{2\Omega_s}{2}} X(\omega) e^{-j\frac{2\pi n}{2\Omega_s}\omega} d\omega = \frac{1}{2\Omega_s} \int_{-\Omega_s}^{\Omega_s} X(\omega) e^{-jn\tau_s\omega} d\omega$$

と表される. 式(2)において $t = n\tau_s$ とした式とフーリエ係数 c_n を見比べることで,

$$c_{-n} = \frac{\pi}{\Omega_s} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{\Omega_s} X(\omega) e^{jn\tau_s\omega} d\omega = \frac{\pi}{\Omega_s} x(n\tau_s) = \frac{\pi}{\Omega_s} x[n]$$

が成り立つことが分かる. したがって,

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\tau_s\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\tau_s\omega} = \frac{\pi}{\Omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\tau_s\omega} \quad (3)$$

となる. 以下の問いに答えよ.

(問 1) 式(2)および(3)を用いて, シャノンのサンプリング定理の中核的な式である

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \Omega_s(t - n\tau_s)}{\Omega_s(t - n\tau_s)} \quad (4)$$

が成り立つことを示せ.

(次のページに続く)

(問 2) 次式で定義される関数

$$\phi_n(t) \equiv \frac{\sin \Omega_s(t - n\tau_s)}{\Omega_s(t - n\tau_s)}$$

を考える。ただし、 $\phi_n(n\tau_s) = 1$ とする。 $\phi_n(t)$ のフーリエ変換が

$$\Phi_n(\omega) \equiv F[\phi_n(t)] = \frac{\pi}{\Omega_s} \text{rect}(\omega) e^{-jn\tau_s\omega} \quad (5)$$

であることを示したい。そのために、 $\Phi_n(\omega)$ の逆フーリエ変換が

$$F^{-1}[\Phi_n(\omega)] = \phi_n(t) \quad (6)$$

となることを示せ。尚、

$$\text{rect}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega_s \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。

(問 3) 問 2 と同様に、 $\phi_n(-t)$ のフーリエ変換は

$$F[\phi_n(-t)] = \bar{\Phi}_n(\omega), \text{ あるいは, } F[\phi_n^*(t)] = \bar{\Phi}_n(\omega) \quad (7)$$

となることを示したい。ここで、 $\bar{\Phi}_n(\omega)$ は $\Phi_n(\omega)$ の共役複素関数である。また、

$$\phi_n^*(t) \equiv \phi_n(-t) \quad (8)$$

と定義した。式(7)が成り立つことを示すために、

$$F^{-1}[\bar{\Phi}_n(\omega)] = \phi_n(-t), \text{ あるいは, } F^{-1}[\bar{\Phi}_n(\omega)] = \phi_n^*(t) \quad (9)$$

を示せ。

(問 4) 整数 m および n に対して、次の等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m(\omega) \bar{\Phi}_n(\omega) d\omega = \frac{\pi}{\Omega_s} \delta_{mn} \quad (10)$$

を示せ。ここで、

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{if } m = n \\ 0, & \text{if } m \neq n \end{cases}$$

である。

(問 5) 問 4 の結果は、以下の等式を意味する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \frac{\pi}{\Omega_s} \delta_{mn} \quad (11)$$

式(11)が成り立つことの証明である以下の文章の空欄 (a) から (d) に入れるのに適切な数式を解答用紙に記せ。

[証明]

m および n を整数として、 $\phi_m(t)$ と $\phi_n^*(t)$ の畳み込み積分を

$$h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(\tau) \phi_n^*(t - \tau) d\tau \quad (12)$$

と定義する。 $h(t)$ のフーリエ変換 $H(\omega)$ は、 $\Phi_m(\omega)$ と $\Phi_n(\omega)$ を用いて、

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \boxed{\text{(a)}} \quad (13)$$

と表される。さて、式(12)において $t = 0$ とおくと、

$$h(0) = \boxed{\text{(b)}} \quad (14)$$

となる。式(8)の定義にしたがって、式(14)の ϕ_n^* を ϕ_n を用いて書き換えると、

$$h(0) = \boxed{\text{(c)}} \quad (15)$$

と表せる。一方、

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (16)$$

でもある。式(16)において $t = 0$ とおくと、

$$h(0) = \boxed{\text{(d)}} \quad (17)$$

となる。式(15)の右辺と式(17)の右辺は等しいことから、等式

$$\boxed{\text{(c)}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\text{(a)}} d\omega$$

が成り立つ。この等式の右辺に式(10)を適用することで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \frac{\pi}{\Omega_s} \delta_{mn}$$

を得る。

[証明終わり]

式(11)は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\Omega_s}{\pi}} \phi_m(t) \sqrt{\frac{\Omega_s}{\pi}} \phi_n(t) dt = \delta_{mn}$$

と書き換えられる. これは, 式(4)の級数を書き換えた次式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega_s}} x[n] \sqrt{\frac{\Omega_s}{\pi}} \phi_n(t) \quad (18)$$

によって, $x(t)$ が関数列 $\left\{ \sqrt{\frac{\Omega_s}{\pi}} \phi_n(t) \right\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を正規直交基底関数とする級数展開に

よって表され, その展開係数がサンプル値系列 $\sqrt{\frac{\pi}{\Omega_s}} x[n]$ で与えられることを意味する.

以下の問では, 2つの連続時間信号 $x(t) = \sin(2\pi t)$ および $y(t) = \sin(6\pi t)$ を等時間間隔 $\tau_s = 1/4$ s でサンプルする状況を考える. このとき, サンプリング角周波数は 8π rad/s であり, ナイキスト角周波数は $\Omega_s = 4\pi$ rad/s となる.

- (問 6) $x(t)$ および $y(t)$ の波形を図示せよ. さらに, $n = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ に対するサンプル値 $x[n]$ および $y[n]$ を, それぞれ図示した $x(t)$ および $y(t)$ の波形上にプロットし, プロットした 9 個の点の間を線で結んだ折れ線グラフを描画せよ.
- (問 7) $x(t)$ および $y(t)$ を, 式(18)に従い, 基底関数 $\sqrt{\Omega_s / \pi} \phi_n(t)$ を用いて級数展開したときの展開係数を, それぞれ a_n および b_n とする. $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して, a_n および b_n の値を求めよ.
- (問 8) 信号 $y(t)$ はナイキスト角周波数よりも高い周波数成分を含んでいるため, サンプル値系列 $y[n]$ を展開係数として用いた $y(t)$ の無限級数は, 元の連続時間信号 $y(t)$ に収束せず, $y(t)$ とは異なる間違った偽の信号 $\tilde{y}(t)$ が再構成されてしまう. 問 6 の結果を参考にして, 偽の信号 $\tilde{y}(t)$ はどのような関数になるかを答えよ.