機械科学II

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の解答用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ.）

問題１

(1) 区間$(0, \infty)$で区分的に連続な実関数$f(t)$ $(t \geq 0)$を考える．sを複素数として，$f(t)$のラプラス変換を次のように定義する.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)\mathrm{d}t$$

ここで，$F(s)$を像関数と呼ぶ．このとき，$f(t)$に関する以下の問に答えよ.

(a) 像関数が(i), (ii)で与えられる$f(t)$をそれぞれ求めよ.

(i) $\dfrac{3s+16}{s^2+4s+29}$　　　(ii) $\dfrac{s+4}{s^3+5s^2+8s+4}$

(b) ラプラス変換を用いて，次の微分積分方程式および初期条件を満たす$f(t)$を求めよ.

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+5f(t)+6\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t-1)-u(t-2), \qquad f(0)=3$$

ここで，$u(x)$は次式で定義される単位階段関数である.

$$u(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 1つの入力xに対して1つの出力yが与えられる実験がある．この実験を異なる入力xについて4回実施し，4つの実験データ$(x, y) = (-2, 0)$，$(0, -2)$，$(1, 1)$，$(-1, -1)$を得た．これらの4つの実験データを，最小二乗法で2次関数$y = ax^2 + bx + c$に近似したときの，係数a，b，cの値を求めよ．ただし，導出過程も示せ.

問題２

図 2-1(a)に示すように，A 点，B 点，および C 点で単純支持された長さ $3L$ のはり AD のたわみ変形について考える．このはりに対して，AB 間の中心に集中荷重 P を負荷し，BC 間に単位長さあたり w の等分布荷重を負荷する．このとき，3 つの支点に生じる支持反力と，D 点でのたわみを次の手順で求めよ．ただし，はり AD の曲げ剛性は EI で一定とする．

(1) 図 2-1(b)に示すように，はり AD から AB 間を仮想的に切り出す．切り出されたはりの B 点に働く曲げモーメントを M_B とするとき，A 点と B 点に生じる支持反力，および A 点と B 点におけるはりのたわみ角の大きさをそれぞれ求めよ．

(2) 図 2-1(c)に示すように，はり AD から BC 間を仮想的に切り出す．切り出されたはりの B 点に働く曲げモーメントを M_B とするとき，B 点と C 点に生じる支持反力，および B 点と C 点におけるはりのたわみ角の大きさをそれぞれ求めよ．

(3) 問(1)，(2)の結果を用いて，B 点におけるたわみ角の連続性から曲げモーメント M_B を求めよ．

(4) 問(3)の結果を用いて，はり AD の 3 つの支点 A，B，C に生じる支持反力をそれぞれ求めよ．

(5) はり AD の D 点で生じるたわみを求めよ．ただし，たわみの符号は下向きを正とする．

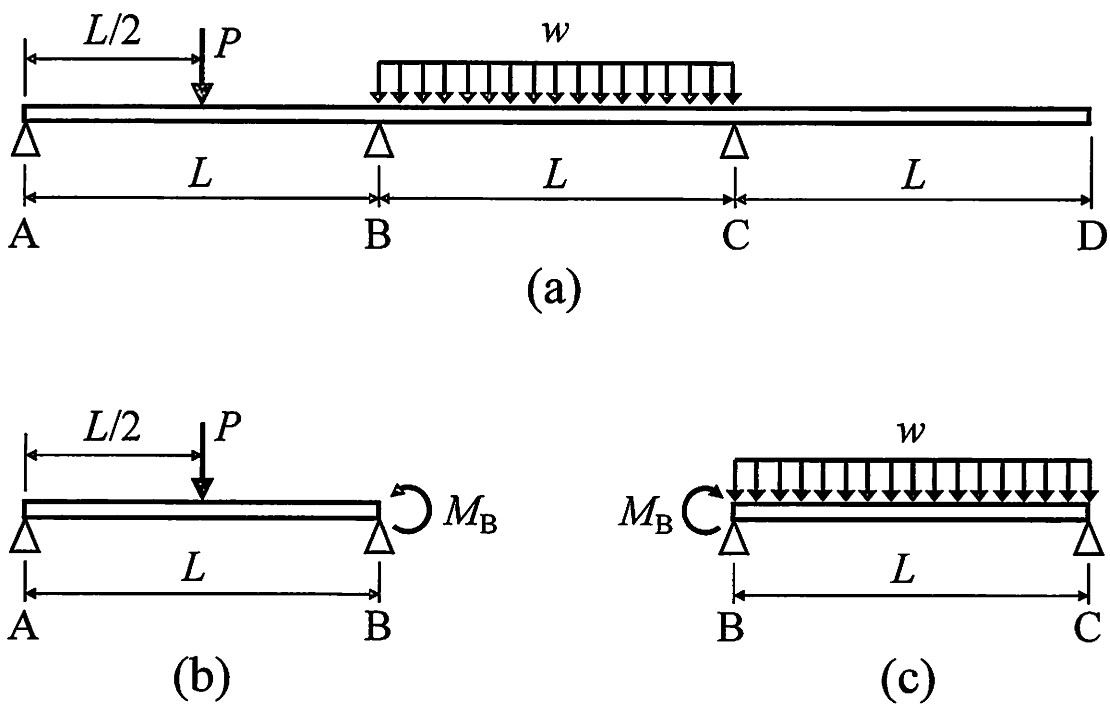

図 2-1

問題３

密度 ρ，粘度 μ の非圧縮ニュートン流体の，xy 平面上の二次元流れを考える．流速ベクトル $\boldsymbol{u} = (u, v)$ と圧力 p は，連続の式およびストークス方程式に従うものとする．これらの支配方程式は，ナブラ演算子 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ と $\boldsymbol{u}$，p を引数とする演算子 $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, p) = -\rho\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u}$ （ここで，t は時刻，$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ はラプラシアン）を用いて，以下のように書ける．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\ \ \mathcal{L}(\boldsymbol{u}, p) = \boldsymbol{0} \qquad (※)$$

以下の問に答えよ．

(1) 式 (※) に従う圧力 p が $\nabla^2 p = 0$ を満たすことを示せ．

(2) 図 3-1 に示すような領域 Ω とその境界 Γ において，$\boldsymbol{u}$，p が以下の支配方程式，初期条件，境界条件に従うものとする．

$$\text{支配方程式: } \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\ \ \mathcal{L}(\boldsymbol{u}, p) = \boldsymbol{0}\ \text{ in } \Omega, \qquad \text{初期条件: } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \text{ at } t = 0, \qquad \text{境界条件: } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} \text{ on } \Gamma \quad (\#)$$

もし２つのベクトル $\boldsymbol{u}_1 = (u_1, v_1)$，$\boldsymbol{u}_2 = (u_2, v_2)$ が以下の関係を満たすならば，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ が上式 (#) を満足することを示せ．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = \nabla\cdot\boldsymbol{u}_2 = 0,\ \ \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, p_1) = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_2, p_2) = \boldsymbol{0}\ \text{ in } \Omega, \qquad \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_0 \text{ at } t = 0, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma$$

ただし，$p_1 = 0$，$p_2 = p$ とする．

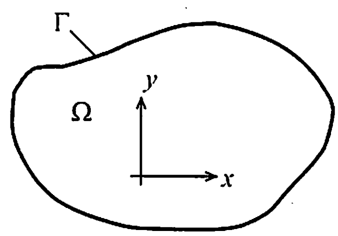

図 3-1

無限平行平板間の定常流れを考える．流速と圧力は式 (※) に従う．図 3-2(a) に示すように，流体は $y = 0$ での静止板の壁面と $y = H$ での移動板（x 軸方向に速度 U_{w} で移動）の壁面に接触し，壁面を貫通しない．流れは移動板および圧力勾配によって駆動される．流速は x 座標に依存せず，駆動圧力勾配は $-\dfrac{\partial p}{\partial x} = A$ （ここで，A は定数）と書けるものとする．以下の問に答えよ．

(3) 流速成分 u，v に対する以下の関係を導け．ここで，$y = 0$ で $u = v = 0$，$y = H$ で $u = U_{\mathrm{w}}$，$v = 0$ とする．

$$A + \mu\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = 0,\ v = 0 \ \text{ for } 0 < y < H$$

(4) 以下の関係を満たす u_1 を，μ，H，U_{w}，y のうち必要なものを用いて表せ．

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}y^2} = 0 \ \text{ for } 0 < y < H, \qquad u_1 = 0 \text{ at } y = 0, \qquad u_1 = U_{\mathrm{w}} \text{ at } y = H$$

（次ページに続く）

問題３の続き

(5) 以下の関係を満たす u_2 を，μ，A，H，y のうち必要なものを用いて表せ．

$$A+\mu\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}y^2}=0 \ \text{ for } 0<y<H, \qquad u_2=0 \ \text{ at } y=0, \qquad u_2=0 \ \text{ at } y=H$$

(6) 問 (3) の u について，移動板速度 U_w を調整し，平行平板間における x 方向の体積流量をゼロにする．このときの U_w を，μ，A，H，y のうち必要なものを用いて表せ．

図 3-2(b) に示すように，移動板（x 軸方向に速度 $\mathrm{Re}\left(\hat{U}_\mathrm{w}\exp(\mathrm{i}\omega t)\right)$ で移動）と圧力勾配 $-\dfrac{\partial p}{\partial x}=\mathrm{Re}\left(\hat{A}\exp(\mathrm{i}\omega t)\right)$ によって駆動される振動流れを考える．ここで，$\hat{U}_\mathrm{w}$，$\hat{A}$ は複素定数，$\mathrm{Re}(\hat{\phi})$ は複素数 $\hat{\phi}$ の実部，i は虚数単位，ω は角振動数であり，記号 ^ は複素数を表す．図 3-2(a) の系と同様に，無限平行平板間の流体は，$y=0$ での静止板の壁面と $y=H$ での移動板の壁面に接触し，壁面を貫通しない．流速の x 方向成分を $u(y,t)=\mathrm{Re}\left(\hat{u}(y)\exp(\mathrm{i}\omega t)\right)$ と書き，以下の関係を満たす $\hat{u}$ を評価する．

$$-\mu\hat{\zeta}^2\hat{u}+\hat{A}+\mu\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}y^2}=0 \ \text{ for } 0<y<H, \qquad \hat{u}=0 \ \text{ at } y=0, \qquad \hat{u}=\hat{U}_\mathrm{w} \ \text{ at } y=H$$

ここで，$\hat{\zeta}=(1+\mathrm{i})\sqrt{\dfrac{\omega\rho}{2\mu}}$ である．以下の問に答えよ．

(7) 以下の関係を満たす $\hat{u}_3$ を，μ，$\hat{\zeta}$，H，$\hat{U}_\mathrm{w}$，y のうち必要なものを用いて表せ．

$$-\mu\hat{\zeta}^2\hat{u}_3+\mu\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}_3}{\mathrm{d}y^2}=0 \ \text{ for } 0<y<H, \qquad \hat{u}_3=0 \ \text{ at } y=0, \qquad \hat{u}_3=\hat{U}_\mathrm{w} \ \text{ at } y=H$$

(8) 以下の関係を満たす $\hat{u}_4$ を，μ，$\hat{\zeta}$，$\hat{A}$，H，y のうち必要なものを用いて表せ．

$$-\mu\hat{\zeta}^2\hat{u}_4+\hat{A}+\mu\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}_4}{\mathrm{d}y^2}=0 \ \text{ for } 0<y<H, \qquad \hat{u}_4=0 \ \text{ at } y=0, \qquad \hat{u}_4=0 \ \text{ at } y=H$$

(9) $\hat{u}=\hat{u}_3+\hat{u}_4$ と書ける．$u=\mathrm{Re}\left(\hat{u}\exp(\mathrm{i}\omega t)\right)$ について，移動板速度 $\mathrm{Re}\left(\hat{U}_\mathrm{w}\exp(\mathrm{i}\omega t)\right)$ を調整し，$y=0$ での静止板の壁面に作用する流体からの摩擦力を常にゼロにする．このときの $\hat{U}_\mathrm{w}$ を，μ，$\hat{\zeta}$，$\hat{A}$，H，y のうち必要なものを用いて表せ．

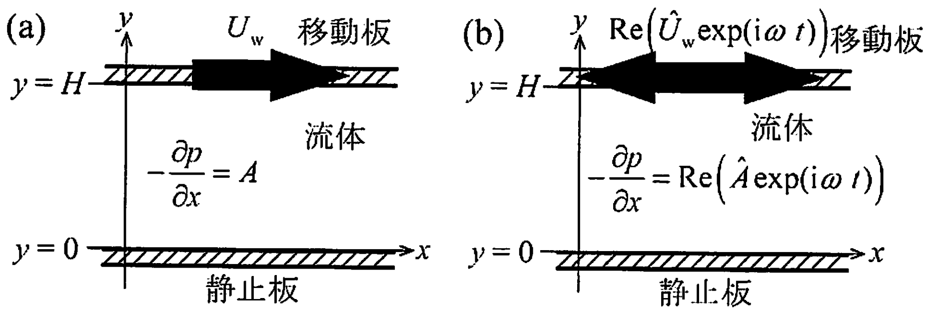

図 3-2