機械科学Ｉ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の解答用紙を用いる場合には,「問題１（２枚目）」などのように記入せよ.）

問題１

シリンダ内に封入された気体定数 R，定積比熱 c_v の理想気体を考える．図 1-1 に示すように，この気体はピストンと仕切りにより２つに分けられ，シリンダに固定された仕切りを介して互いに熱のみを交換できる．仕切りの熱容量は無視でき，気体とシリンダの間，および気体とピストンの間での熱の授受はないものとする．また，シリンダ，ピストンおよび仕切りは剛体とみなせるものとする．仕切り，シリンダおよびピストンに囲まれた空間内の気体を気体Ｘ，シリンダと仕切りに囲まれた空間内の気体を気体Ｙとよぶ．気体Ｘと気体Ｙの質量をそれぞれ m_X および m_Y とする．定積比熱 c_v は一定である．

(1) 初期状態において，ピストンは留め具によりシリンダに固定され，気体Ｘと気体Ｙの体積はそれぞれ V_X および V_Y，絶対温度はそれぞれ T_X および T_Y（$T_Y > T_X$）であった．初期状態から，十分に時間が経過した後，気体Ｘと気体Ｙの絶対温度はどちらも T_1 となった．この状態を状態 1 とよぶ．この過程において，気体Ｘが得た熱量を Q_X，気体Ｘと気体Ｙを合わせた系全体のエントロピーの変化量を ΔS とする．以下の問に答えよ．

(a) T_1 を m_X，m_Y，T_X，T_Y のうち必要なものを用いて示せ．

(b) Q_X を c_v，m_X，m_Y，T_X，T_1 のうち必要なものを用いて示せ．

(c) ΔS を c_v，m_X，m_Y，T_X，T_Y，T_1 のうち必要なものを用いて示せ．

(d) 問 (c) の結果から，この過程が不可逆であることを示せ．

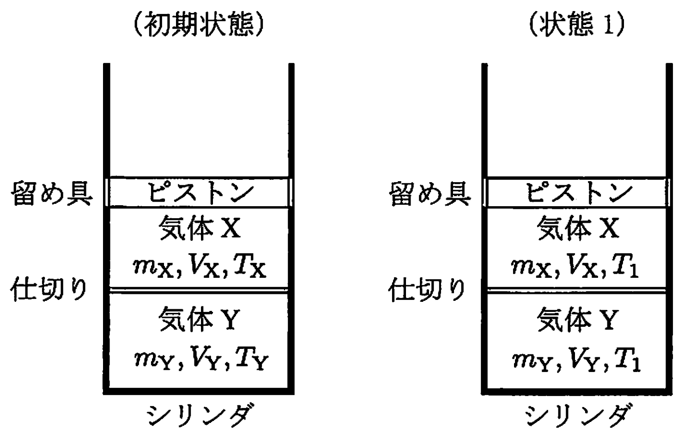

図 1-1

（次ページに続く）

問題１の続き

(2) 図 1-2 に示すように，シリンダが真空中に置かれ，シリンダ内の気体Ｘと気体Ｙが問 (1) の状態 1 である場合を考える．状態 1 において，ピストンの留め具を気体に仕事をしないように取り除くと，十分に時間が経過した後，気体Ｘの体積が $2V_X$，気体Ｘと気体Ｙの絶対温度がどちらも T_2 の状態で落ち着いた．この状態を状態 2 とよぶ．次に，状態 2 において，気体の状態を保ったまま，ピストンを留め具によりシリンダに固定した．その後，ピストンの上に質量 m のおもりをのせ，気体に仕事をしないように留め具を取り除くと，十分に時間が経過した後，気体Ｘの体積が V_X，気体Ｘと気体Ｙの絶対温度がどちらも T_3 の状態で落ち着いた．この状態を状態 3 とよぶ．状態 $1 \to 2 \to 3$ の複合過程において，気体Ｘがした仕事を W とする．ピストンの質量を M，断面積を A とする．ピストンはシリンダの内壁に沿って気密性を保ったまま滑らかに上下でき，常に水平に保たれるものとする．重力加速度の大きさを g とする．気体に作用する重力は無視できるものとする．以下の問に答えよ．

(e) T_2 および T_3 を，V_X および R，m_X，m，M，A，g のうち必要なものを用いてそれぞれ示せ．

(f) W を，V_X および m_X，m，A，g のうち必要なものを用いて示せ．

(g) T_3 を，T_1 および R，c_v，m_X，m_Y，m，M のうち必要なものを用いて示せ．

(h) W を，T_1 および R，c_v，m_X，m_Y，m，M のうち必要なものを用いて示せ．

(i) 気体Ｘと気体Ｙの質量比を $\alpha = m_Y/m_X$ とする．$\alpha \to \infty$ における T_3 および W を，T_1 および R，m_X，M のうち必要なものを用いてそれぞれ示せ．

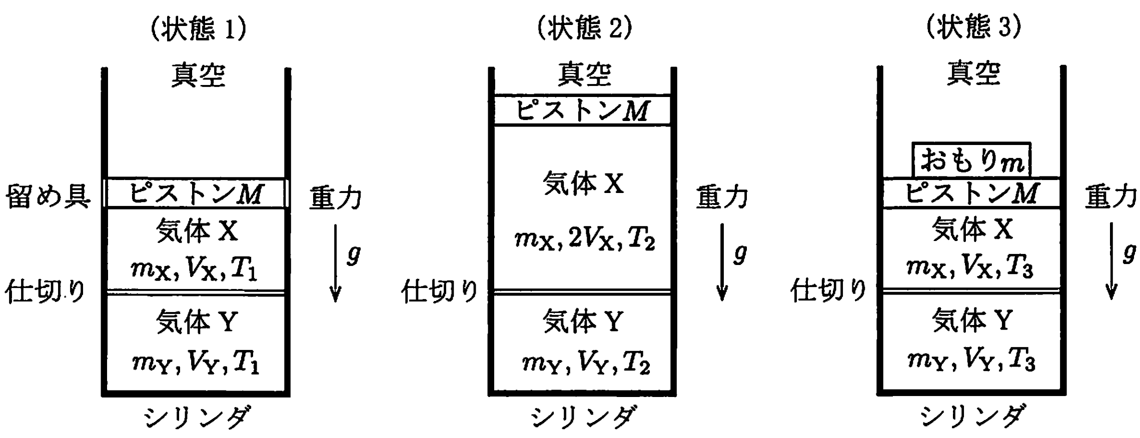

図 1-2

問題２

図 2-1 のように，滑らかな水平面上に，質量の無視できるばね定数 k_1 のばねを介して壁とつなげられた，質量 m_1 の質点がある．質点は時刻 t に依存する $m_1 f\cos(\omega t)$ の周期外力を受けている．f は定数，ω は角振動数である．ばねが自然長となる位置からの質点の変位を $x_1(t)$ として，以下の問に答えよ．ただし，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ を $\dot{x}(t)$ と表す．また，ばねは十分に長く，質点は壁と衝突しないものとする．

(1) この 1 質点系の運動方程式を記せ．

(2) $f=0$ とする．$x_1(0)=x_0$，$\dot{x}_1(0)=0$ のときの $x_1(t)$ を求めよ．

(3) $f>0$ とする．周期外力と同じ角振動数で振動する問(1)の運動方程式の特解 $\check{x}_1(t)$ を求め，$x_1(0)=x_0$，$\dot{x}_1(0)=0$ のときの $x_1(t)$ を求めよ．

(4) $\check{x}_1(t)$ の振幅は ω に対して変化する．ω^2 に対する $\check{x}_1(t)$ の振幅の概形を描け．

(5) $\check{x}_1(t)$ の振る舞いは，$\omega^2<k_1/m_1$ と $\omega^2>k_1/m_1$ では大きく異なる．振幅以外に何がどのように異なるかを具体的に答えよ．

(6) $\omega^2=k_1/m_1+\varepsilon$ において，問(3)で求めた $x_1(t)$ に対して $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}x_1(t)$ を求めよ．

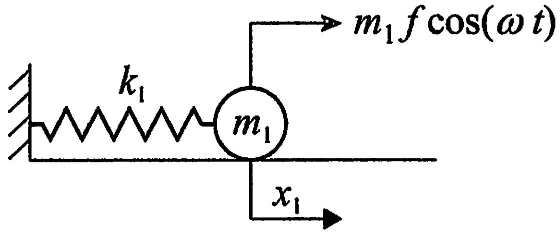

図 2-1

（次ページに続く）

問題２の続き

次に，上記の周期外力による質量 m_1 の質点の振動を抑えるために，図 2-2 のように，質量の無視できるばね定数 k_2 のばねを介し，質量 m_1 の質点に質量 m_2 の質点をつないだ．2 つのばねがいずれも自然長となる位置からの，質量 m_2 の質点の変位を $x_2(t)$ として，以下の問に答えよ．ただし，追加したばねも十分に長く，質量 m_2 の質点は質量 m_1 の質点および壁と衝突しないものとする．

(7) この２質点系の運動方程式を記せ．

(8) 周期外力と同じ角振動数で振動する，質量 m_1，m_2 の質点における問(7)の運動方程式の特解をそれぞれ $\hat{x}_1(t)$，$\hat{x}_2(t)$ とするとき，それらの振幅 A_1，A_2 は

$$A_1 = \left| \frac{-(\omega^2 - \boxed{(ア)})}{(\omega^2 - \boxed{(イ)})(\omega^2 - \boxed{(ウ)})} f \right|, \qquad A_2 = \left| \frac{\boxed{(エ)}}{(\omega^2 - \boxed{(イ)})(\omega^2 - \boxed{(ウ)})} f \right|$$

と書ける．以下の ω_0，ω_+，ω_- を用いて，$\boxed{(ア)}$，$\boxed{(イ)}$，$\boxed{(ウ)}$，$\boxed{(エ)}$ に入る数式を示せ．

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \qquad \omega_\pm = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - \frac{4k_1k_2}{m_1m_2}}\right\}} \quad (複号同順)$$

ただし，

$$\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 > \frac{4k_1k_2}{m_1m_2}$$

であり，$0 < \omega_- < \omega_0 < \omega_+$ である．

(9) ω に対する $\hat{x}_1(t)$ の振幅の変化を知りたい．ω^2 に対する A_1 の概形を描け．

(10) $\hat{x}_1(t)$ の振動を抑えたい．振幅 $A_1 = 0$ にする追加質点の質量 m_2 を，m_1，f，ω，k_1，k_2 のうち必要なものを用いて表せ．

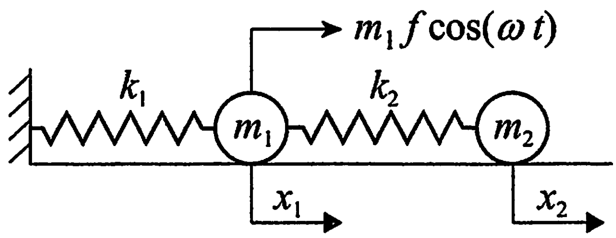

図 2-2

問題３

(1) $y(x)$ に関する微分方程式,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2 - y \qquad ①$$

について，以下の問に答えよ．

(a) $y \neq 0$ のとき，$z = \dfrac{1}{y}$ とおいて，式①を $z(x)$ に関する微分方程式に変換せよ．

(b) 式①の一般解 $y(x)$ を求めよ．

(2) $y(x)$ に関する微分方程式,

$$x^3 \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 2\ln(x) - 1 \qquad ②$$

について，以下の問に答えよ．ただし，$x > 0$ とする．

(a) $t = \ln(x)$ とおいて，式②を $y(t)$ に関する微分方程式に変換せよ．

(b) 式②の一般解 $y(x)$ を求めよ．

(3) $x(t)$，$y(t)$ に関する連立微分方程式,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y + t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - y \end{cases} \qquad ③$$

について，以下の問に答えよ．

(a) 式③から $y(t)$ を消去し，$x(t)$ の２階の微分方程式に変形せよ．

(b) 式③の一般解 $x(t)$ を求めよ．

(c) 式③の一般解 $y(t)$ を求めよ．

(4) ３次元空間における任意の３つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を考える．これらによってベクトル $\vec{V}$ を,

$$\vec{V} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \qquad ④$$

と定義する．また，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ を互いに直交する単位ベクトルとする．以下の問に答えよ．

(a) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{i})$ を $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ の線形和の形で表せ．

(b) $\vec{a} \cdot \vec{V}$ を求めよ．

(c) ある実数 m，n に対して,

$$\vec{V} = m\vec{a} + n(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - n(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \qquad ⑤$$

が成り立つ．このとき，m，n を求めよ．