機械科学II

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題１

せん断応力 τ が以下の式に従う流体をべき乗則流体と呼び，懸濁液など複雑流体の物性を表すために用いられる．

$$\tau = K\dot{\gamma}^n$$

ここで K は比例定数（単位 [Pa s^n]），n（$n > 0$ の実数）はべき乗の係数，$\dot{\gamma}$（$\dot{\gamma} > 0$）はせん断速度である．図 1-1 に示す半径 R の円管には非圧縮のべき乗則流体が満たされており，一定の圧力勾配 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = -A$ ($A > 0$) により駆動する流れを考える．円管壁面は滑りなし境界であるとする．なお円管の中心軸を x 軸とし，x 軸からの距離を r とする．流速は x 方向成分 $u(r)$のみを持ち，流れは定常と仮定する．

(1) 有効粘度を $\mu_{\mathrm{eff}} = \tau/\dot{\gamma}$ として与えたとき，せん断速度の増加に対する有効粘度の変化を $n = 1$，$n > 1$，$n < 1$ に分けてそれぞれ簡潔に述べよ．

(2) 図 1-1 のように中心軸が円管と一致する半径 r，長さ $\mathrm{d}x$ の円柱状の微小要素を考え，力の釣り合いからせん断応力 $\tau(r)$ を A，r を用いて表せ．

(3) 問(2)の結果と壁面での境界条件，および，せん断速度が$\dot{\gamma} = -\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ であることを用いて流速 $u(r)$を求めよ．

(4) 管内の最大流速 $u_{\max}$ で規格化された流速 $u(r)/u_{\max}$ を求めよ．また $n = 1$，$n \gg 1$，$n \ll 1$ の 3 つの場合について，r/R に対する $u(r)/u_{\max}$ の分布の概略を図示せよ．

(5) 流速 $u(r)$より体積流量 Q を算出せよ．

(6) あるn，Kを有するべき乗則流体に対し，管半径 R の管路内全域でせん断速度がある値$\dot{\gamma}_0$以下となる制約条件のもとで，圧力勾配 A を調整し流量を最大化したい．この条件下での最大流量 $Q_{\max}$ を$\dot{\gamma}_0$，R，n を用いて示せ．

(7) 問(6)の制約条件のもとで，様々なべき乗則流体を流す．最大流量 $Q_{\max}$ の取り得る範囲を示せ．

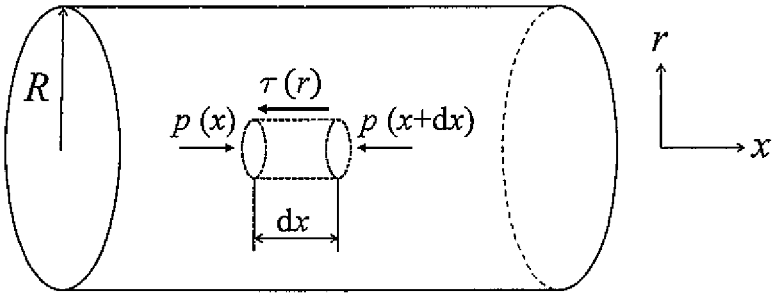

図 1-1

問題２

図2-1に示すように，水平軸を x 軸に，鉛直軸を y 軸にとった慣性系 $\mathrm{O}-xy$ において，外トルク τ によって駆動される半径 r，質量 μ の剛体円板（以下「円板」）がある．円板の中心軸は円板の質量中心を通り，紙面と垂直な状態が保持されている．円板の中心軸まわりの慣性モーメントを J とする．円板は x 軸上の最下点（接地点）で点接触しながら，x 軸正の方向または負の方向に滑らず回転移動できるものとする．円板の接地点の x 座標を X で，円板の回転角度を ϕ で表し，X，ϕ の時間微分をそれぞれ $\dot{X}\left(=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)$，$\dot{\phi}\left(=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)$ で表す．ただし，$X=0$ のとき $\phi=0$ と定め，ϕ の向きは紙面時計回りを正とする．この円板の中心軸に長さ l，質量 m の一様な細い剛体棒（以下「棒」）が図のように接続された倒立振子系の重力下での平面運動を考える．重力は y 軸負の方向に作用するものとし，重力加速度の大きさを g とする．棒は，円板の中心軸まわりに自由に回転できる．鉛直軸と平行な直線からの棒の回転角度を図のように θ で表し，θ の時間微分を $\dot{\theta}\left(=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$ で表す．エネルギーの散逸は無視するものとし，重力によるポテンシャルエネルギーの基準面を $y=0$ として，以下の問に答えよ．

(1) 接地点の位置 X を r および ϕ を用いて表せ．

(2) 棒の質量中心まわりの慣性モーメントを l および m を用いて表せ．

(3) 円板の運動エネルギーを r，μ，J および $\dot{\phi}$ を用いて表せ．

(4) 棒の運動エネルギーを r，l，m，θ，$\dot{\theta}$ および $\dot{\phi}$ を用いて表せ．

(5) 円板のポテンシャルエネルギーを r，μ，l，m，g，θ のうち必要なものを用いて表せ．

(6) 棒のポテンシャルエネルギーを r，μ，l，m，g，θ のうち必要なものを用いて表せ．

(7) この倒立振子系のラグランジアンを r，μ，J，l，m，g，θ，$\dot{\theta}$ および $\dot{\phi}$ を用いて表せ．

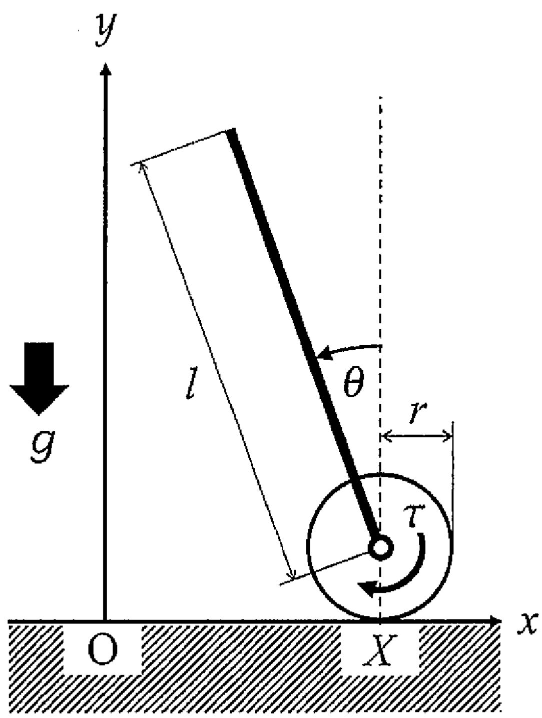

図 2-1

（次ページに続く）

問題２の続き

図 2-1 において，棒が倒立した状態は不安定であるが，フィードバック制御により安定化することを考える.

(8) この倒立振子系の運動方程式は

$$\left\{J + (\mu + m) r^2\right\} \ddot{\phi} - \frac{1}{2} mrl \cos\theta \cdot \ddot{\theta} + \frac{1}{2} mrl \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 = \tau$$

$$\cos\theta \cdot \ddot{\phi} - \frac{2l}{3r} \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin\theta = 0$$

となることを示せ．ただし，$\ddot{\phi}$，$\ddot{\theta}$ は，それぞれ ϕ，θ の時間２階微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ を表すものとする.

(9) θ および $\dot{\theta}$ を微小量とみなして，問 (8) の方程式を線形化したのち，得られた二式から $\ddot{\phi}$ の項を消去することにより，次のような θ に関する微分方程式が得られる.

$$A\ddot{\theta} + B\theta = \tau$$

(a) 係数 A を r，μ，J，l，m を用いて表せ.

(b) 係数 B を r，μ，J，m，g を用いて表せ.

(10) θ と $\dot{\theta}$ を測定しながら，円板を駆動する外トルク τ を通して，

$$\tau = \alpha\,\theta + \beta\,\dot{\theta}$$

のように θ および $\dot{\theta}$ をフィードバックするとき，問 (9) の系が安定になるための α，β に関する条件を r，μ，J，l，m，g のうち必要なものを用いて表せ.

問題３

図 3-1 のように 3 次元空間内に原点 O を通る平面 S が存在している．平面 S から離れた位置に点 X が存在し，平面 S に対して鏡像の位置に点 Y が存在している．原点 O から点 X までの位置ベクトルと点 Y までの位置ベクトルをそれぞれ列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と表し，平面 S の単位法線列ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表す．ただし，$\boldsymbol{n}$ は平面 S に対して点 X が存在する側を向いている．また，ベクトル $\boldsymbol{q}$ に対して，転置ベクトルは $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}$，ノルムは $\|\boldsymbol{q}\|$ と表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{x}$ のなす角を α としたとき，$\cos\alpha$ を $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(3) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ としたとき，行列 $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{I}$ を単位行列として次のように表されることを示せ．

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}}$$

(4) $\boldsymbol{H}$ は対称行列であることを示せ．

(5) $\boldsymbol{H}$ の逆行列は $\boldsymbol{H}$ であることを示せ．

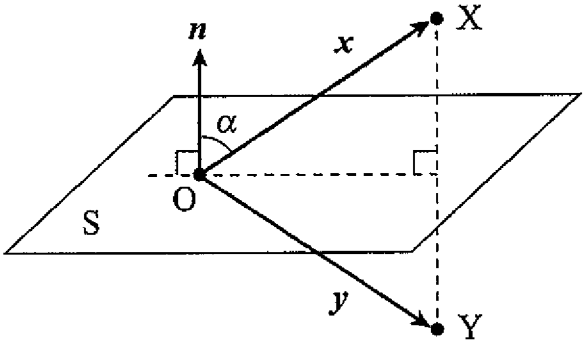

図 3-1

行列 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & 0 & 5\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix}$ が与えられているときに，上の $\boldsymbol{H}$ を用い，$\boldsymbol{Q}$ をある行列，$\boldsymbol{R}$ を対角成分よりも下側の成分が全て 0 である上三角行列として $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ に変形することを考える．

(6) 3 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を用いて $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ と表し，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{y}=[\|\boldsymbol{x}\|\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ とする．このときの $\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{H}_1$ とすると，$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}p & q & r\\ 0 & s & t\\ 0 & v & w\end{bmatrix}$ と表されることを示せ．ここで，p, q, r, s, t, v, w はそれぞれある定数である．

(7) 問(6)で得られた行列を $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}$ とし，$\boldsymbol{x}=[0\ s\ v]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=[0\ \|\boldsymbol{x}\|\ 0]^{\mathrm{T}}$ とする．このときの $\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{H}_2$ とすると，$\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}'$ は上三角行列になることを示せ．

(8) 問(7)で得られた上三角行列を $\boldsymbol{R}$ としたとき，$\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{Q}$ の逆行列をそれぞれ $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ を用いて表せ．

列ベクトル $\boldsymbol{b}=[1\ 3\ -1]^{\mathrm{T}}$ が与えられているときに，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{z}$ を求めたい．

(9) 問(8)までの結果を利用して，$\boldsymbol{z}$ を求めよ．