機械科学Ｉ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題 1

図 1-1 に，直径 d の丸棒が折れ曲がった，L 字形の曲がりはり ABC を示す．図 1-1 のように設けられた x, y, z 軸に対して，はりの AB 部が x 軸と平行になるように，はりの端点 A は壁面に対して垂直に固定されている．また，はりは，点 B において xy 平面内で直角に折れ曲がっている．AB 間の長さは a，BC 間の長さは b であり，はり材のヤング率は E，剛性率は G である．端点 C には集中荷重（x 成分 P_x，z 成分 P_z）を作用させる．なお，a と b はいずれも d より十分大きいものとし，重力，はりに働く軸力，および折れ曲がり部での応力集中の影響は考慮しない．以下の問に答えよ．

(1) 直径 d の丸棒の断面二次モーメント I_z が，$I_z=\pi d^4/64$ となることを定義にしたがって導出せよ．
(2) 直径 d の丸棒の断面二次極モーメント I_p が，$I_p=\pi d^4/32$ となることを定義にしたがって導出せよ．

集中荷重 $P_x=0$，$P_z=P$ が作用する場合を考える．
(3) 点 A における反力，曲げに関する反モーメント，ねじりに関する反モーメントをそれぞれ求めよ．
(4) 曲がりはりに生じるひずみエネルギーを a，b，P，E，G，I_z，I_p を用いて示せ．
(5) 点 C における z 方向の変位の大きさを a，b，P，E，G，I_z，I_p を用いて示せ．
(6) 点 A における最大主応力の大きさを a，b，P，d を用いて示せ．

次に，集中荷重 $P_x=P$，$P_z=0$ が作用する場合を考える．
(7) 点 C における x 方向の変位の大きさを a，b，P，E，I_z を用いて示せ．
(8) 点 C における y 方向の変位の大きさを a，b，P，E，I_z を用いて示せ．
(9) 点 A における最大曲げ応力の大きさを b，P，d を用いて示せ．

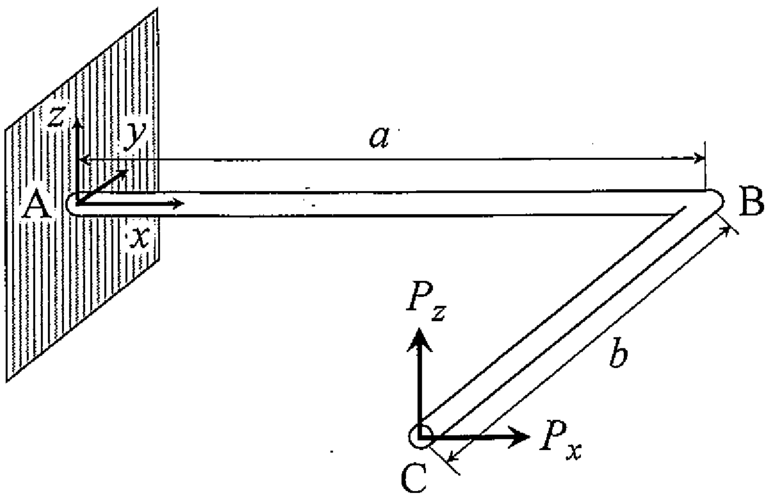

図 1-1

問題２

図2-1に示すような，大気中を鉛直方向に運動する小さな空気塊を考える．鉛直上向きにz軸をとり，重力加速度の大きさをgとする．空気塊の絶対温度をT，圧力をpとし，これらはその周囲の大気の絶対温度および圧力にそれぞれ等しいものとする．また，空気塊の体積，内部エネルギー，エンタルピー，エントロピーの単位質量あたりの値をそれぞれv，u，h，sとする．T，p，v，u，h，sの微小変化量をそれぞれ$\mathrm{d}T$，$\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}h$，$\mathrm{d}s$と表す．空気塊とその周囲の大気の間で熱や物質の移動はないものとする．

(1) 空気塊がガス定数R，定圧比熱c_pの理想気体のみからなる場合を考える．ただし，Rとc_pはそれぞれ正の定数とする．以下の問に答えよ．

(a) $\mathrm{d}u$をp，v，$\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}h$を用いて示せ．

(b) この空気塊は可逆断熱変化を行うものとし，$\mathrm{d}T$をv，$\mathrm{d}p$，c_pを用いて示せ．

(c) 問(b)の結果を用いて，Tp^{-R/c_p}が一定となることを示せ．

(d) この空気塊の周囲の大気は静止しており

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{v} \qquad \text{(I)}$$

が成り立つとする．問(b)の結果より，このときの鉛直方向の温度低下率$\Gamma_\mathrm{d} = -\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$を$g$と$c_\mathrm{p}$を用いて示せ．また，$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$c_\mathrm{p} = 1.0\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)}$とし，この空気塊が100 m上昇するごとの低下温度[K]を求めよ．

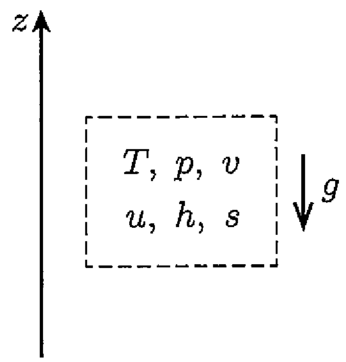

図2-1

（次ページに続く）

問題２の続き

(2) 水蒸気を含む空気塊が上昇すると，水蒸気が凝結することで水滴（雲）が生じる．このときの鉛直方向の温度低下率を以下の手順で示そう．

まず，空気塊が平衡状態にある飽和水蒸気と飽和水からなる場合を考える．ただし，飽和水蒸気をガス定数 R_v の理想気体とみなす．また，飽和水蒸気の圧力を $p_\mathrm{v}(T)$ とし，単位質量あたりの凝結熱を $l_\mathrm{v}(T)$ とする．以下の問に答えよ．

(e) $\mathrm{d}s$ を T，p_v，$\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}u$ を用いて示せ．

(f) 問 (e) の結果より，s を T と v の関数と考えることで

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{1}{T}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p_\mathrm{v}\right\} \tag{II}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$(\partial X/\partial Y)_Z$ は，Z を固定したときの，X の Y に対する偏導関数を表す．

(g) 式 (II) のそれぞれの式を T あるいは v で偏微分することで，$(\partial u/\partial v)_T$ を T，p_v，$\mathrm{d}p_\mathrm{v}/\mathrm{d}T$ を用いて示せ．

(h) 飽和水蒸気と飽和水の単位質量あたりの体積をそれぞれ $v_\mathrm{v}(T)$，$v_\mathrm{w}(T)$ とすると，この空気塊が平衡状態であることから $(\partial u/\partial v)_T = l_\mathrm{v}/(v_\mathrm{v} - v_\mathrm{w}) - p_\mathrm{v}$ が成り立つ．問 (g) の結果より，$\mathrm{d}p_\mathrm{v}/\mathrm{d}T$ を T，l_v，v_v，v_w を用いて示せ．

(i) 問 (h) の結果より，v_v が v_w に対して十分に大きいと仮定すると

$$\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{v}}{\mathrm{d}T} = \frac{l_\mathrm{v} p_\mathrm{v}}{R_\mathrm{v} T^2} \tag{III}$$

が成り立つことを示せ．

次に，空気塊が平衡状態にある乾燥空気，飽和水蒸気，飽和水からなる場合を考える．ただし，乾燥空気をガス定数 R_d の理想気体とみなす．この空気塊中の乾燥空気の質量を m_d，飽和水蒸気の質量を m_v とし，それらの比を $w_\mathrm{s} = m_\mathrm{v}/m_\mathrm{d}$ とする．また，乾燥空気の分圧を p_d，単位質量あたりの体積を v_d とする．以下の問に答えよ．

(j) 鉛直方向の w_s の変化率が

$$\frac{\mathrm{d}w_\mathrm{s}}{\mathrm{d}z} = w_\mathrm{s}\left(\frac{1}{p_\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{v}}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{p_\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) \tag{IV}$$

と表されることを示せ．

(k) この空気塊について

$$\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{v_\mathrm{d}} \tag{V}$$

$$c_\mathrm{p}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + g = -l_\mathrm{v}\frac{\mathrm{d}w_\mathrm{s}}{\mathrm{d}z} \tag{VI}$$

および式 (III) が成り立つとする．ここで，c_p は問 (1) の理想気体の定圧比熱である．このときの鉛直方向の温度低下率 $\Gamma_\mathrm{m} = -\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ を T，g，c_p，R_d，R_v，l_v，w_s を用いて示せ．また，$l_\mathrm{v} > R_\mathrm{v} c_\mathrm{p} T/R_\mathrm{d} > 0$ であるとし，Γ_m と問 (d) で求めた Γ_d との大小関係を論ぜよ．

問題３

確率，エントロピー，及びそれに係る数学的基礎について次の問に答えよ．

(1) 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$f(x) \geqq 0,\quad x\in[0,\infty) \qquad \cdots \text{(i)}$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in[0,\infty) \qquad \cdots \text{(ii)}$$

を満足するとき，以下を示せ．

(a) x_1, $x_2 \in [0,\infty)$, $x_2 > x_1$ に対し，

$$f(x_2) \geqq f(x_1)$$

が成り立つ．

(b) 任意の非負の整数を n とするとき，

$$f(nx)=nf(x),\quad x\in[0,\infty)$$

が成り立つ．

(c) 任意の整数 $m \geqq 0$, $n>0$ に対し，有理数 $r=\dfrac{m}{n}$ として，

$$f(rx)=rf(x),\quad x\in[0,\infty)$$

が成り立つ．

(d) c を非負の実数とするとき，

$$f(x)=cx,\quad x\in[0,\infty)$$

が成り立つ．

(2) 区間 $(0,1]$ で定義された連続関数 $I(p)$ が

$$I(p)\geqq 0,\quad p\in(0,1]$$

$$I(pq)=I(p)+I(q),\quad p,q\in(0,1]$$

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

を満足するとき，以下を示せ．

(e) $p=2^{-x}$, $x\in[0,\infty)$ とおき，$f(x)=I(p)$ とする．このとき $f(x)$ は問(1)の条件(i)，(ii)を満足する．

(f) $I(p)=-\log_2 p$, $p\in(0,1]$ が成り立つ．

(3) N 個の事象が離散確率分布

$$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_N),\quad p_i\geqq 0\ (i=1,2,\cdots,N)$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

に従うとき，以下によって定義される量

$$H(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{N}\left(-p_i\log_2 p_i\right)$$

をエントロピーと呼ぶ．ただし，$p_i=0$ のとき，$-p_i\log_2 p_i=0$ とする．確率分布の制約条件 $\sum_{i=1}^{N}p_i=1$ のもとでエントロピー関数 $H(\boldsymbol{p})$ が極値をとる点を考えることで，エントロピーを最大にする確率分布 $\boldsymbol{p}^*$ 及びそのときのエントロピー $H(\boldsymbol{p}^*)$ を求めよ．