機械科学Ⅱ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題１

行列 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & a^2-4a+3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，aは実数とする．

(1) 行列Aの固有値を求めよ．

(2) 行列Aが対角化可能である場合，すなわち，ある正則行列Pおよび対角行列Qと行列Aが，$Q=P^{-1}AP$の関係にある場合について以下の問に答えよ．

(a) aが満たす条件を示せ．

(b) 行列Pと行列Qをそれぞれ求めよ．

(c) 行列Aのべき乗A^nを求めよ．ただし，nは自然数とする．

(3) 行列Aが対角化可能でない場合について以下の問に答えよ．ただし$a\neq 1$であり，このとき行列Aはある正則行列$\tilde{P}$および三角行列$\tilde{Q}$と$\tilde{Q}=(\tilde{P})^{-1}A\tilde{P}$の関係にある．

(a) $\tilde{Q}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$とする．このとき行列$\tilde{P}$を$a$を用いて表せ．また，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$を求めよ．

ただし，λ_1，λ_2，λ_3は実数とする．

(b) 行列Aのべき乗A^nを，aを用いて表せ．ただし，nは自然数とする．

（ヒント：行列$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$，および行列$U=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$を用いて$\tilde{Q}=D+U$と書ける．）

(c) (b)の結果を用いてA^{10}を計算せよ．ただし，$a=2$とする．

問題２

図 2-1 に示すような，分裂する物体の 1 次元運動を考えよう．ある時刻 t において x 軸方向に速度 $v>0$ で運動する質量 m の物体 X が，微小時間 Δt の間に，微小質量 Δm の物体 Y と質量 $m-\Delta m$ の物体 Z に分かれた．このとき物体 Y と物体 Z の速度はそれぞれ u, $v+\Delta v$ であった．各物体を質点として，以下の問に答えよ．

(1) 物体 X が分裂するとき，作用・反作用の法則により，物体 Y と物体 Z の間には大きさの等しい逆向きの力 $\pm F$ が作用する．分裂の間に物体 Z に作用する力積 $F\Delta t$ を m を用いて表せ．ただし，2 次以上の微小項を無視せよ．また，Δt の間，F は一定とする．

(2) 分裂の間に物体 Y に作用する力積 $-F\Delta t$ を Δm を用いて表せ．

(3) 問(1), (2) の結果より $F\Delta t$ を消去して，Δm と Δv の関係を求めよ．

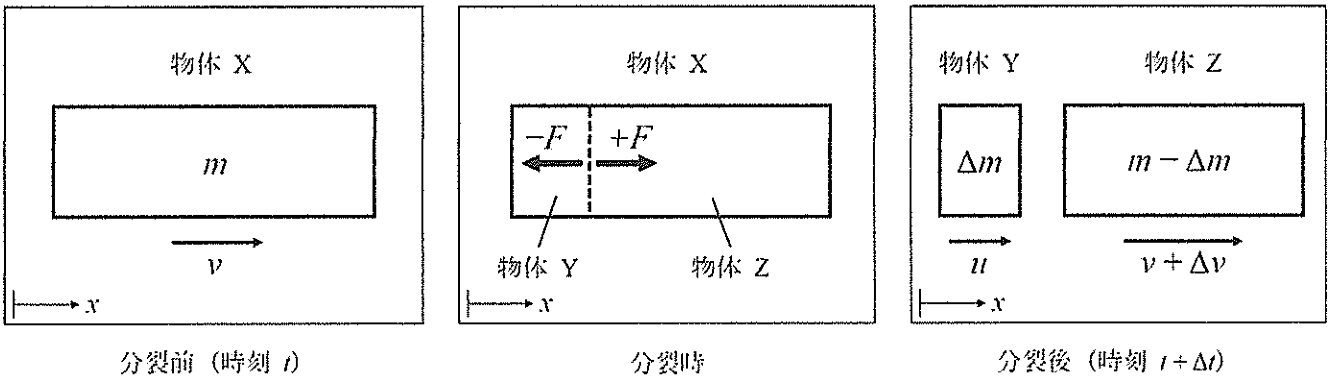

図 2-1

つぎに，図 2-2 に示すような，ガスを噴射しながら上空を進む飛翔体の 2 次元運動を考えよう．ガスは飛翔体の後方に大きさ w の相対速度で噴射され，飛翔体の質量 M は時間 t の経過とともに連続的に減少する．飛翔体を質点（図 2-2 白丸）とし，その水平方向の位置を x，鉛直方向の位置を y，水平方向の速度を v_x，鉛直方向の速度を v_y，水平面からのガスの噴射角度を ϕ とするとき，以下の問に答えよ．なお，鉛直下向きに大きさ g の重力加速度が作用し，空気抵抗の影響は無視できるものとする．

(4) 問(1), (2), (3) の結果を参考にして，飛翔体の単位質量当たりの推力（噴射ガスが飛翔体の単位質量に及ぼす力）f を w, M, $\dfrac{dM}{dt}$ を用いて表せ．

(5) 飛翔体の水平方向の加速度 a_x および鉛直方向の加速度 a_y を f, ϕ, g を用いて表せ．

（次ページに続く）

問題２の続き

(6)　時刻 $t=0$ に $y=0$, $v_x=0$, $v_y=0$, $\phi=\phi_0$ （ϕ_0 をある初期角度とする）で打ち上げられた飛翔体が，$y=h$, $v_y=0$, $\phi=0$ となった．この時刻を $t=T$ とする．このとき速度 $v_x|_{t=T}$ を最大とする ϕ の時間関数を求めたい．そこで，$\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}$, $\dot{v}_y=\dfrac{dv_y}{dt}$, $\dot{\phi}=\dfrac{d\phi}{dt}$ として

$$L=a_x+\lambda\left(\dot{y}-v_y\right)+\mu\left(\dot{v}_y-a_y\right)$$

なるスカラ関数 L を考え，

$$\int_0^T L\,dt$$

の極値を考えよう．ここで λ, μ はラグランジュ未定乗数である．問(5)の結果を用いて，次の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_y}\right)-\frac{\partial L}{\partial v_y}=0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0$$

を λ, $\dfrac{d\lambda}{dt}$, μ, $\dfrac{d\mu}{dt}$, ϕ のみでそれぞれ表現せよ．

(7)　問(6) の方程式より

$$\tan\phi=\left(1-\frac{t}{T}\right)\tan\phi_0$$

を導け．

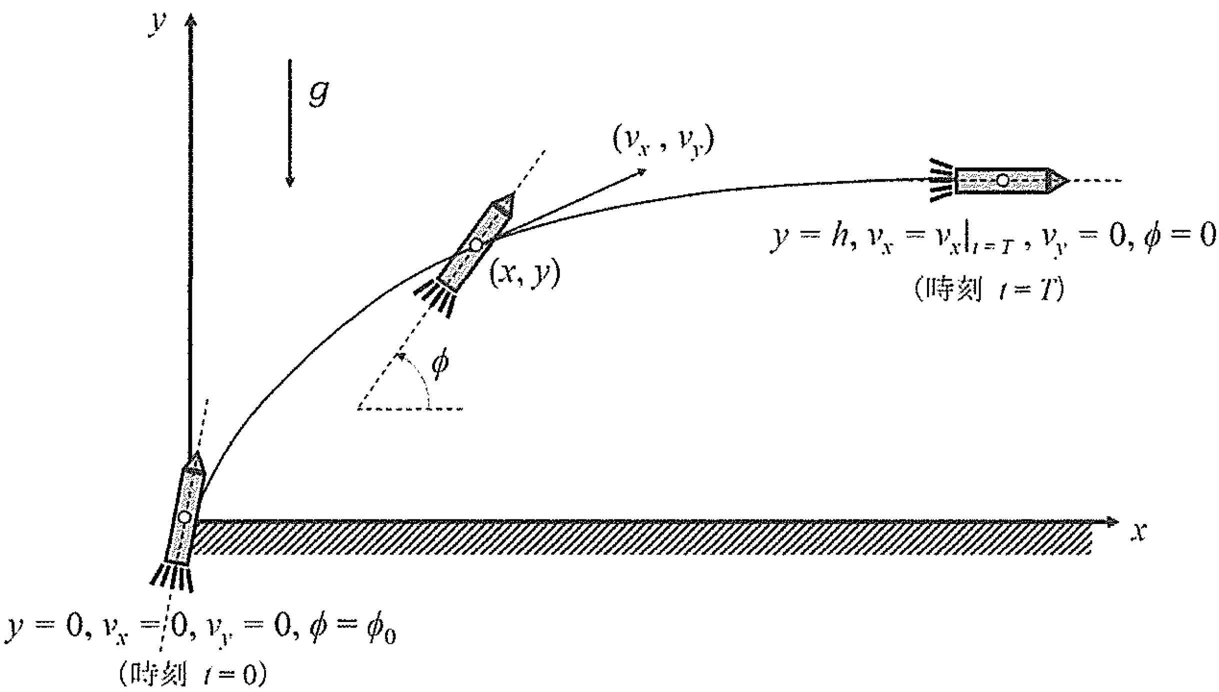

図 2-2

問題３

運動する円形物体（半径a）が誘起する二次元流れを考える（図 3-1）．流体は非圧縮性（密度ρ），かつ，非粘性の理想流体とする．重力の作用は無視できるものとする．円の中心を原点とする複素座標$z(=x+\mathrm{i}y=r\exp(\mathrm{i}\theta))$（ここで，i は虚数単位）と複素ポテンシャル$w(z)$には以下の関係が成り立つ．

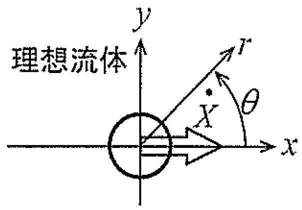

図 3-1

$$w=\phi+\mathrm{i}\psi,\ \ u_r-\mathrm{i}u_\theta=\exp(\mathrm{i}\theta)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$$

ここで，ϕは速度ポテンシャル，ψは流れ関数，u_r, u_θは，それぞれ，流速ベクトルのr, θ方向成分である．圧力はp，動圧は$p_{\mathrm{dyn}}(=\rho(u_r^2+u_\theta^2)/2)$，流速ベクトルの$x$, y方向成分は，それぞれ，u, vと記す．力，エネルギ，流体の体積は，紙面垂直方向の単位厚みあたりで考える．

まず，静止した無限流体中を，x軸方向に速度$\dot{X}$で円形物体が運動する場合を考える（時刻tにおいて，複素座標zの原点は，静止系の原点からx軸方向にXの位置にあり，$\dot{X}=\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$の関係が成り立つ）．静止系から見た流速を与える複素ポテンシャルは次式で与えられる．

$$w=-\frac{a^2}{z}\dot{X}$$

以下の問に答えよ．

（１） 速度ポテンシャルϕを，a, $\dot{X}$, r, θのうち必要なものを用いて書け．

（２） 動圧p_{dyn}を，ρ, a, $\dot{X}$, r, θのうち必要なものを用いて書け．

（３） 次式で与えられる流れ場全体の運動エネルギKを求めよ．

$$K=\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}p_{\mathrm{dyn}}\ r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

（４） 流れ場が円形物体の運動によって誘起される場合，Kは，円形物体表面上$r=a$でのϕ, $\partial\phi/\partial r$を用いて，次式で与えられる．

$$K=-\frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a}\mathrm{d}\theta \tag{I}$$

問（１）のϕを式(I)に代入して求まるKが，問（３）で求めたKと一致することを示せ．

（５） 円形物体が等速運動する場合（$\mathrm{d}\dot{X}/\mathrm{d}t=0$である場合）を考える．静止系から見た流れが定常であるならば，ベルヌーイの定理は，同一流線上で，

$$p_{\mathrm{dyn}}+p=一定 \tag{II}$$

と書ける．しかし，静止系において円の中心が移動する場合は，流速が時間変化する非定常流れとなるため，問（２）で求めた動圧p_{dyn}は式(II)を満足しない．ただし，円の中心から見た流速成分$u-\dot{X}$, vは，定常流れの流速成分とみなすことができる．これを踏まえて，ベルヌーイの定理が次式で与えられることを示せ．

$$-\dot{X}u+\frac{p_{\mathrm{dyn}}+p}{\rho}=\frac{P_\infty}{\rho} \tag{III}$$

ここで，P_∞は無限遠での圧力である．

（次ページに続く）

問題３の続き

（６） 問（２），（５）の関係に基づき，円形物体表面上$r=a$での圧力分布$p|_{r=a}$を，ρ, a, P_∞, $\dot{X}$, x, θのうち必要なものを用いて求めよ．

（７） 問（６）で求めた圧力分布から，円形物体に作用する流体力のx方向成分F_xを求めよ．さらに，結果を踏まえて，ダランベールのパラドックスを説明せよ．

（８） 円形物体の運動に加速を伴う場合を考える．一般化されたベルヌーイの定理は，以下のように，式(III)に加速度$\ddot{X}=\mathrm{d}\dot{X}/\mathrm{d}t$を含む項を加えた形式で書ける．

$$\frac{\partial\phi}{\partial\dot{X}}\ddot{X}-\dot{X}u+\frac{p_{\mathrm{dyn}}+p}{\rho}=\frac{P_\infty}{\rho}$$

円形物体に作用する流体力のx方向成分F_xを，ρ, a, $\dot{X}$, $\ddot{X}$, P_∞のうち必要なものを用いて求めよ．

（９） 理想流体では，ポテンシャルエネルギが無視できれば，Kを解析力学のラグランジアンとみなすことができる．このとき，$F_x=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial K}{\partial\dot{X}}\right)+\dfrac{\partial K}{\partial X}$の関係が成り立つ．問（３）で求めた$K$をこの関係に代入して，円形物体の運動に加速を伴う場合のF_xを求めよ．さらに，このF_xが，問（８）で求めたF_xと一致することを示せ．

次に，図 3-2 に示すように，静止無限流体中に，x軸方向に平行な無限平板が加わった系を考える．円形物体はx軸方向に速度$\dot{X}$で運動し，加速を伴う．円の中心は，平板から一定の距離$Y(>2a)$を保つ（$\dot{Y}=\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t=0$が成り立つ）．円表面付近での複素ポテンシャルは次式で与えられるものとする．

$$w=-\left\{\left(1+\frac{a^2}{4Y^2}\right)\frac{a^2}{z}+\frac{a^2 z}{4Y^2}\right\}\dot{X}$$

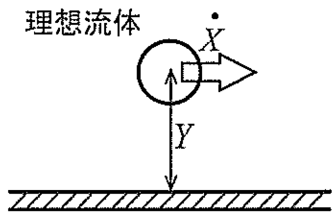

図 3-2

以下の問に答えよ．

（１０）式(I)を用いて，流れ場全体の運動エネルギKを求めよ．

（１１）円形物体に作用する流体力のx方向成分$F_x=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial K}{\partial\dot{X}}\right)+\dfrac{\partial K}{\partial X}$，および，$y$方向成分$F_y=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial K}{\partial\dot{Y}}\right)+\dfrac{\partial K}{\partial Y}$を求めよ．