機械科学Ｉ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題１

複素平面上の領域 D において正則な関数 $f(z)$ $(z \in D)$ と領域 D に含まれる閉曲線 C がある．D 内に任意の点 A($z=a$)をとり，閉曲線 C が点 A の周りを 1 周するときに，

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad \text{(I)}$$

が成り立つ．ただし，積分は閉曲線 C が囲む領域に対して正の向きに行うものとする．このことをふまえて以下の問に答えよ．積分の向きは，閉曲線で囲まれる領域が進行方向の左手になる場合を正とする．iは虚数単位($i=\sqrt{-1}$)とする．

(1) $f(z)=(z-a)^n$ であるとき

$$\oint_C f(z)\,dz$$

を計算せよ．ただし，閉曲線 C が点 A($z=a$)を中心とする半径 b の円で与えられ，積分は閉曲線 C が囲む領域に対して正の向きに 1 周するものとする．n は整数であり，b は正の実数である．

(2) 閉曲線 C が領域 D 内の点 A($z=a$)の周りを 1 周する任意の閉曲線として与えられ，閉曲線Γが点 A を中心とする十分小さい半径εの円として与えられるときに，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$$

の関係が成り立つ．ただし，両辺の積分はそれぞれ閉曲線 C と閉曲線Γが囲む領域に対して正の向きに 1 周するものとする．このことを用いて式(I)が成り立つことを示せ．ただし，εを十分小さくしたときに

$$\left|\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \leqq 2\pi\varepsilon|f'(a)|$$

が成り立つ．また，このとき$2\pi\varepsilon|f'(a)|\approx 0$となることを用いてもよい．$f'(a)$は $z=a$ での $f(z)$の導関数である．εは正の実数である．

（次ページに続く）

問題１の続き

(3) 閉曲線 C が $z=4e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ で与えられるとき，

$$\oint_C \frac{e^z}{z-3}\,dz$$

を計算せよ．ただし積分は閉曲線 C が囲む領域に対して正の向きに 1 周するものとする．

(4) 閉曲線 C が原点を中心とする半径 R の円で与えられ，閉曲線 C の内部の任意の点 A が $a=re^{i\theta}$ で与えられるとき $(r<R)$，式(I)を用いて

$$f(re^{i\theta}) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\phi})}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}\,d\phi$$

が成り立つことを示せ．領域 D 内の点 A が $a=(R^2/r)\,e^{i\theta}$ で与えられるときの，式(I)の右辺の積分についても考えてみるとよい．ただし，r，R は正の実数であり，θ は実数である．

(5) 以下の２つの積分を計算し，計算結果を θ を用いて示せ．ただし，θ は実数とする．

$$\frac{6}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{5-3\cos(\theta-\phi)}\,d\phi$$

$$\frac{6}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi}{5-3\cos(\theta-\phi)}\,d\phi$$

問題２

(1) 状態方程式が

$$\left(P+\frac{m^2a}{V^2}\right)(V-mb)=mRT$$

で与えられるファン・デル・ワールス気体を図 2-1 のように圧力 P_0，体積 V_0 の初期状態から膨張させる．ここで，この気体の質量を m，圧力を P，体積を V，絶対温度を T とし，R，a，b はそれぞれ正の定数とする．

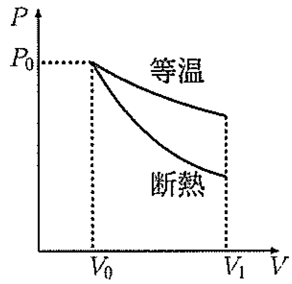


図 2-1

(a) この気体を初期状態から体積 V_1 へ準静的に等温膨張させたときの圧力 P_{T} を求めよ．

(b) この気体の定積比熱 c_{v} を正の定数とする．この気体の体積 V，絶対温度 T の状態での内部エネルギー U を求めよ．ただし，$T\to 0$，$V\to\infty$ での内部エネルギーを U_0 とする．また，z を一定に保った場合の x の y に対する偏導関数を $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ と書く．このとき，$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-P$ を用いて良い．

(c) この気体の準静的な断熱過程において，

$$\left(P+\frac{m^2a}{V^2}\right)(V-mb)^{(R+c_{\mathrm{v}})/c_{\mathrm{v}}}=一定$$

が成立することを示せ．

(d) この気体を初期状態から体積 V_1 へ準静的に断熱膨張させたときの圧力 P_{S} を求めよ．

(e) $P_{\mathrm{S}}<P_{\mathrm{T}}$ となることを示せ．ただし，$V_1>V_0>mb$ とする．

(2) 一般の気体でも圧力 P_0，体積 V_0 の初期状態から体積 V_1 まで準静的に膨張させたとき，等温膨張させた場合の圧力 P_{T} の方が断熱膨張させた場合の圧力 P_{S} より大きくなる．そのことを以下の手順で示そう．

(f) 気体の圧力を P，体積を V，絶対温度を T，エントロピーを S，定積比熱を c_{v}，定圧比熱を c_{p} として，$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S=\frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ が成立することを示せ．ここで，任意の気体で質量を m として

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V=\frac{mc_{\mathrm{v}}}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V,\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P=\frac{mc_{\mathrm{p}}}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$$

が成立することと，任意の偏導関数で $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$ が成立することを用いて良い．

(g) (f) の結果を用いて $P_{\mathrm{T}}>P_{\mathrm{S}}$ を示せ．ただし，$c_{\mathrm{p}}>c_{\mathrm{v}}$ と $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\leq 0$ が成立すると仮定して良い．

（次ページに続く）

問題２の続き

(3) (g) では $\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T \leqq 0$ を仮定していた．以下の手順でこの不等式を示そう．

絶対温度 T の等温環境で図 2-2 に示すような容器に入った気体のサイクルを考える．状態 A では体積 $2V_0$ の平衡状態にあり，ここに気体を通さない壁を差し込んで体積 V_0 の２つの領域に区切る（状態 B）．次に，この壁を準静的に動かして２つの領域の体積をそれぞれ $V_0 - \Delta V$ と $V_0 + \Delta V$ に変化させる（状態 C）．最後にこの壁を取り除いて状態 A に戻す．ただし，壁の差し込みと除去を行う際に，この気体が行う仕事は無視できる．

(h) この気体の体積 V，絶対温度 T での圧力を $P(V,T)$ とする．このサイクルで気体が行う仕事 W は $W = \displaystyle\int_{V_0}^{V_0+\Delta V} P(V,T)dV + \int_{V_0}^{V_0-\Delta V} P(V,T)dV$ で与えられる．ΔV が V_0 より十分小さいと仮定して，W を ΔV の２次までテイラー展開せよ．

(i) 熱力学第２法則と (h) の結果を用いて，$\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T \leqq 0$ となることを示せ．

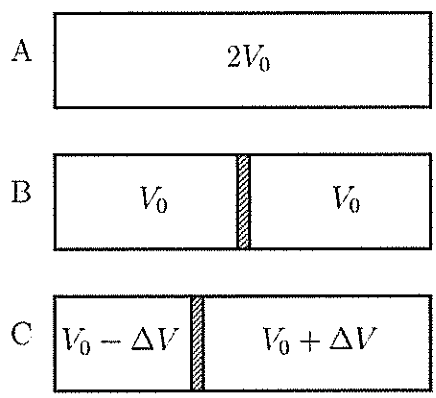


図 2-2

問題３

図(a)に示すように，軸方向の長さが L で，一辺の長さが h の正方形断面を持つ２種類のはり部材を考える．部材 I のヤング率を E_1，線膨張係数を α_1 とし，部材 II のヤング率を E_2，線膨張係数を α_2 とするとき，以下の問に答えよ．ただし，各部材の自重は無視することができ，座屈は生じないものとする．また，線膨張係数は $\alpha_1 > \alpha_2$ とする．

(1) 図(b)に示すように，部材Iと部材IIの両端AおよびBを剛体壁に対して垂直に固定支持した．その後，各部材の温度を ΔT だけ増加させるとき，部材Iおよび部材IIに生じる軸力をそれぞれ求めよ．

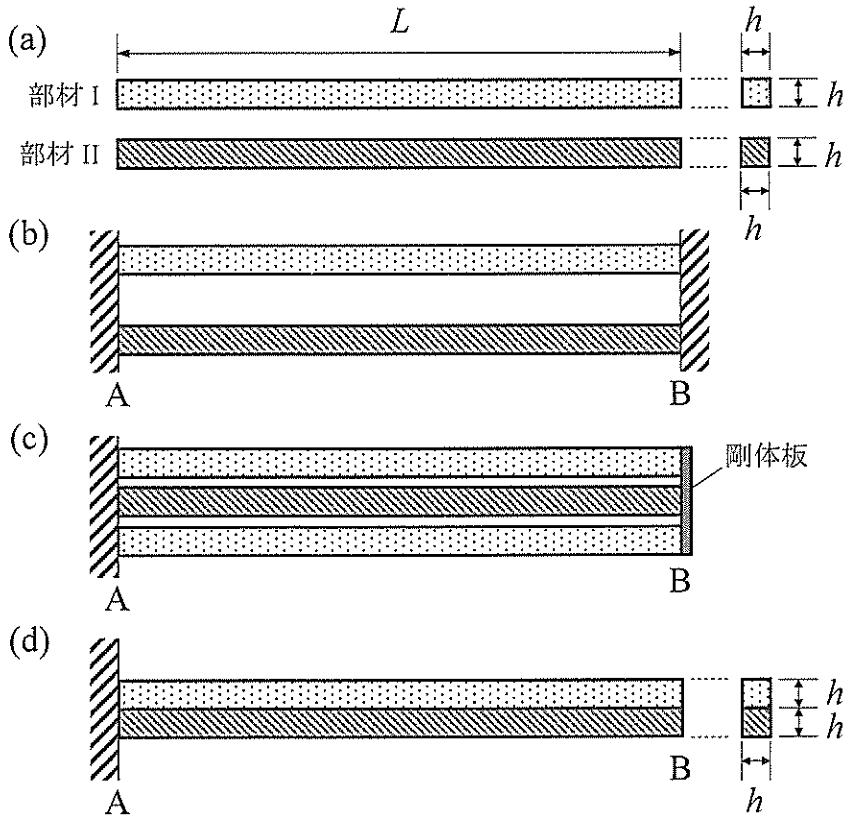
(2) 図(c)に示すように，2本の部材Iと1本の部材IIの一端Aを剛体壁に対して垂直に固定支持し，他端Bは端面に垂直に剛体板を取り付けた．その後，各部材の温度を ΔT だけ増加させるとき，部材Iおよび部材IIに生じる軸力をそれぞれ求めよ．ただし，2本の部材Iは中央の部材IIに対して対称に配置されており，剛体板の質量は無視できるものとする．

(3) 図(d)に示すように，部材Iと部材IIを接合した組み合わせはりに対して，その一端Aを剛体壁に対して垂直に固定支持し，他端Bは自由端とした．その後，組み合わせはりの温度を ΔT だけ増加させたところ，たわみ変形が生じた．このとき以下の問に答えよ．ただし，ここでは各部材のヤング率を $E_1 = E$，$E_2 = 2E$ とする．

(i) 部材Iおよび部材IIの断面二次モーメントをそれぞれ求めよ．ただし，断面二次モーメントを評価する際の基準軸は，各断面の図心を通るものとする．

(ii) 部材Iおよび部材IIに生じる軸力をそれぞれ求めよ．

(iii) 組み合わせはりの先端Bに生じるたわみ量を求めよ．



図