機械科学 I

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題 1

長さ L，直径 D の円形断面を持つ細長い真直棒を考え，断面中心を通る x 軸とそれに直交する y 軸を，図 1(a) のように定める．この棒の左端（$x=0$）を固定端とし，右端（$x=L$）の断面中心から y 軸方向に e（>0）だけ偏心した点に，剛体を介して圧縮荷重 P が作用し，右端のたわみが δ となった状態を考える（図 1(b)）．このとき，位置 x における y 方向たわみは $w(x)$ である．以下の問に答えよ．

(1) 位置 x で棒に働く曲げモーメント $M(x)$ を求めよ．

(2) この棒の断面二次モーメント I を求めよ．

(3) この棒の縦弾性係数を E として，y 方向たわみ $w(x)$ の支配方程式と，その一般解を示せ．

(4) 右端におけるたわみ δ を求めよ．

(5) 圧縮荷重 P をゼロから大きくするとき，問(4)で求めたたわみ δ の変化の特徴を説明せよ．

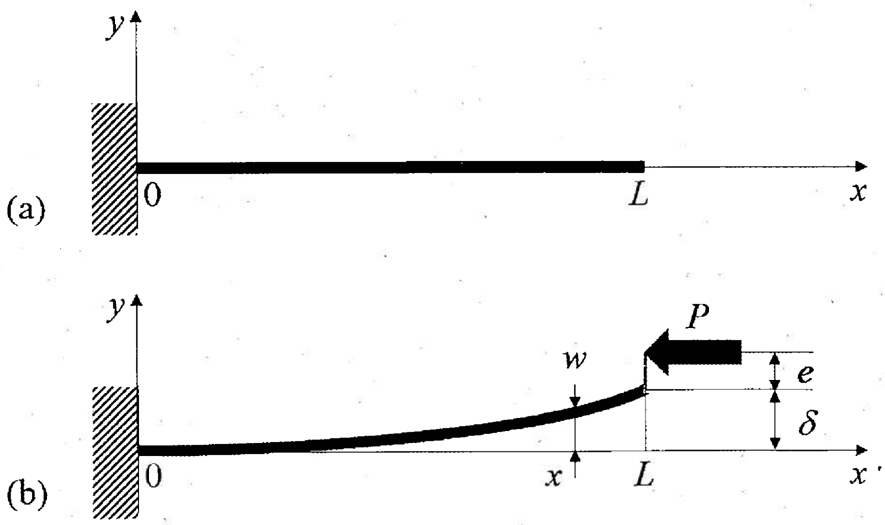

図 1

問題２

次の問 (1) と (2) の両方を解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．

(1) 図 2-1 のような，熱伝導率 k の物質からなる，内半径 R_1，外半径 R_2 の球殻を考え，半径 R_1 および R_2 における絶対温度をそれぞれ T_1 および T_2 で一定に保ち，十分に時間が経過したのちの定常状態を考える．また，半径 r の位置における絶対温度を $T(r)$ と表す．内部発熱が無いと仮定して，以下の問に答えよ．

(a) 半径 r の球面を単位時間あたりに外向きに通過する熱流量 Q を k，T，r を用いて表せ．

(b) $T(r)$ に対する境界条件を書け．

(c) 問 (a) と問 (b) の結果を用いて，$T(r)$ を求めよ．

(d) $Q = 4\pi k R_1 R_2 (T_1 - T_2)/(R_2 - R_1)$ となることを示せ．

(e) 半径 R_1 の球面を通じて，この球殻に単位時間当たりに流入するエントロピーを求めよ．

(f) この系における単位時間当たりのエントロピー生成量を求め，これが非負であることを示せ．

次に，図 2-2 に示すような同心二重球殻（球殻１および球殻２）を考え，半径 R_1，R_2，R_3 を定める．ただし，$R_3 = (R_1 + R_2)/2$ である．また，半径 R_1 および R_2 における絶対温度は，T_1 および T_2 で一定に保つ．さらに，球殻１および球殻２の熱伝導率をそれぞれ k_1 および k_2 とする．内部発熱と界面の接触熱抵抗が無いと仮定して，以下の問に答えよ．

(g) 半径 R_3 の球面上の絶対温度を求めよ．

(h) 球殻１を断熱材，球殻２を金属にした場合と，球殻１を金属，球殻２を断熱材とした場合で，どちらの方が断熱性がよくなるか（熱流量が小さくなるか）を論ぜよ．

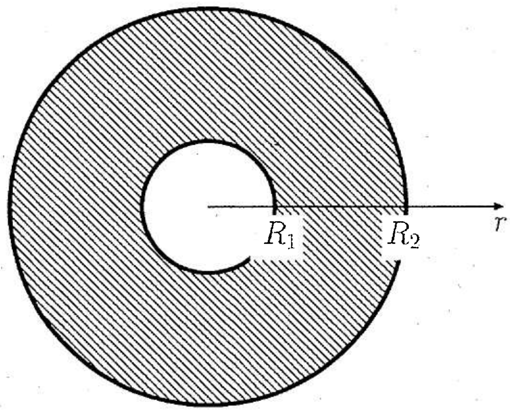

図 2-1

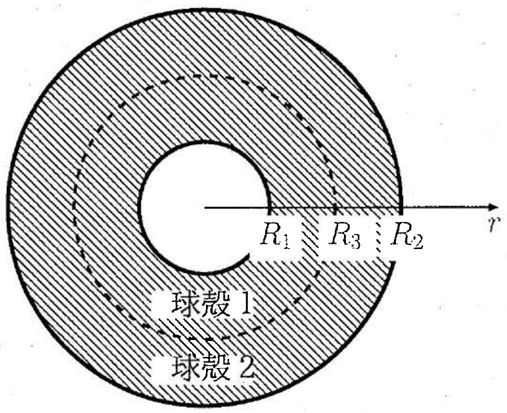

図 2-2

(次ページにつづく)

問題２の続き

(2) 絶対温度 T と体積 V の状態でのエントロピーと内部エネルギーがそれぞれ $S(T,V)$，$U(T,V)$ で与えられる，体積 V_{A} と V_{B} の二つの固体の接触を考える．二つの固体の絶対温度は，図 2-3 に示した初期状態ではそれぞれ T_{A} と T_{B} で与えられ，十分時間が経った終状態では共に T_C になると仮定する．この過程で固体の体積は変化せず，$T_{\mathrm{A}} < T_C < T_{\mathrm{B}}$ とする．また，熱のやりとりは二つの固体の接触面だけで発生すると仮定する．さらに，$\frac{\partial S(T,V)}{\partial T} > 0$ とする．この温度変化が不可逆過程であることを以下の手順で示せ．

(a) この過程での系のエントロピー変化を温度に関する積分の形で示せ．ここで，以下の式が成り立つことを用いて良い．

$$S(T_2,V) - S(T_1,V) = \int_{T_1}^{T_2} dT\,\frac{\partial}{\partial T}S(T,V)$$

(b) この過程での系のエントロピー変化が $\{U(T_C,V_{\mathrm{A}})+U(T_C,V_{\mathrm{B}})-U(T_{\mathrm{A}},V_{\mathrm{A}})-U(T_{\mathrm{B}},V_{\mathrm{B}})\}/T_C$ よりも大きいことを示せ．

(c) これまでの結果を用いて，この過程が不可逆であることを示せ．

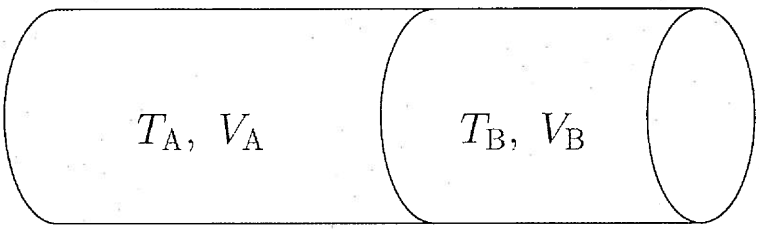

図 2-3

問題３

x の関数

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$$

について，次の問に答えよ．ただし，n は非負の整数とし，$\dfrac{d^0}{dx^0} f(x) = f(x)$ とする．

(1) $P_0(x)$，$P_1(x)$，$P_2(x)$，$P_3(x)$ を求めよ．

(2) 二項定理を用いて

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{-k}}{(n-k)!\,k!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k}$$

となることを示せ．

(3) 問 (2) の数式を変形することにより，

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{-k}(2n-2k)!}{(n-k)!\,k!\,(n-2k)!} x^{n-2k}$$

となることを示せ．ただし，$[\cdot]$ はガウスの記号であり，X を実数，m を整数としたとき，$m \leqq X < m+1$ ならば $[X] = m$ である．

(4) 次の関係が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} (1-x^2)^n \right\} &= (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) - 2(n+1) x \frac{d}{dx} P_n(x) - n(n+1) P_n(x) \\
\frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left\{ (1-x^2)^n \frac{d}{dx} (1-x^2) \right\} &= -2x \frac{d}{dx} P_n(x) - 2(n+1) P_n(x)
\end{aligned}$$

なお，必要に応じて，任意の C^n 級関数 $p(x)$ および $q(x)$ に対して，

$$\frac{d^n}{dx^n} \{ p(x) q(x) \} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p(x) \frac{d^k}{dx^k} q(x)$$

が成立することを利用して良い．

(5) 問 (4) の結果を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n(x) + n(n+1) P_n(x) = 0$$