機械科学 II

次ページから始まる問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．

問題１

次の問(1)，(2)の両方に解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．なお，問(1)，(2)に共通して，虚数単位を $i\,(=\sqrt{-1})$ と表記する．

(1) 原点で連続な任意の関数 $f(t)$ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt = f(0)$$

と定義される，一般化された関数 $g(t)$ について，以下の問に答えよ．

(a) $f(t)$ の任意性を利用して，$f(t)$ に適当な関数を仮定することにより $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt$ の値を求めよ．

(b) $g(t) = g(-t)$ を示せ．

(c) $g(at) = \dfrac{1}{|a|} g(t)$ $(a \neq 0)$ を示せ．

(d) $f(t)$，$g(t)$ の n 次導関数を $f^{(n)}(t)$，$g^{(n)}(t)$ とするとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

を示せ．

(e) $g(t)$ と $g^{(n)}(t)$ に関する以下の関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(t)\, e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

を示せ．

(f) $g(t)$ のフーリエ積分表示を求めよ．

(g) $g(t)$ はどのようなものか、具体的に説明せよ．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{\cos z}{z-\pi}$ について，以下の問に答えよ．

(a) $f(z)$ の特異点をすべて示せ．

(b) 特異点まわりの $f(z)$ のローラン級数を第３項まで示せ．

(c) 特異点における $f(z)$ の留数を求めよ．

(d) 特異点を１つだけ取り囲む任意の閉経路 C に沿って，反時計まわりにとられた積分

$\oint_C f(z)dz$ の値を求めよ．

問題２

図２に示すように，x 軸上に置かれた厚みを無視できる平板に，流速が U で一定の x 軸方向の流れが流入する場合を考える．紙面に垂直な奥行き方向の平板の長さは無限大で，x 軸方向の平板の長さは L，前縁は $x=0$ に位置する．平板に垂直に y 軸をとる．流体は非圧縮性流体であり，密度を ρ，動粘性係数を ν とする．流れは，面 $y=0$ に対して対称な定常の２次元流れであり，$y \geq 0$ の流れの様子のみを図に示している．図中の一点鎖線は，平板の前縁から発達した境界層と主流の境界を表している．

x 軸方向の流速を $u(x,y)$ とする．平板の前縁から発達した境界層の外側の主流の流速は，上流の流速 U と等しく，また，境界層は層流境界層で，境界層内の圧力は主流の圧力と等しいと仮定する．平板上の流体に作用するせん断応力を $\tau_w(x)$，境界層の厚みを $h(x)$ とおき， $y=h(x)$ では $u(x,h(x))/U=1$ として，以下の問に答えよ．

境界層の厚み $h(x)$ に関する支配方程式を導くために，図２中に点線で囲んで示す，平板上の境界層内の位置 x に置かれた，高さが $h(x)$ で x 軸方向に微小な幅 Δx を持つ検査体積（$y \geq 0$，紙面に垂直な方向の厚みは単位長さ）に出入りする流体の保存則を考える．

(1)　下記の文章中の(a)～(c)に適切な数式を入れよ．

検査体積の位置 x にある面から検査体積内に流入する質量流量を $\dot{m}(x)$ とする．このとき，検査体積の位置 $x+\Delta x$ にある面から検査体積外に流出する質量流量は $\dot{m}(x+\Delta x)$ である．これを位置 x でテーラー展開して微小量 Δx の １ 次の項まで評価すると，検査体積の上面から検査体積内に流入する質量流量を，質量保存則より，

$$\dot{m}(x+\Delta x)-\dot{m}(x)= \boxed{\quad (a) \quad} \times \Delta x \cdots\cdots ①$$

と表せる．次に，検査体積の上面から検査体積内に流入する流れの x 軸方向の運動量について考える．この流れの y 軸方向の流速が微小で， x 軸方向の流速が U に等しいと近似し，また，質量流量が式①で与えられることを考えると，検査体積の上面から検査体積内に流入する x 軸方向の運動量は，

$$\boxed{\quad (b) \quad} \times \Delta x \cdots\cdots ②$$

となる．検査体積の位置 x にある面から検査体積内に流入する x 軸方向の運動量を $M(x)$ とすると，検査体積の位置 $x+\Delta x$ にある面から検査体積外に流出する x 軸方向の運動量を $M(x+\Delta x)$ と表せる．これを位置 x でテーラー展開して微小量 Δx の１次の項まで評価し，また式②を考慮すると，検査体積から流出する x 軸方向の運動量の総和を，

$$\left(\boxed{\quad (c) \quad} \right) \times \Delta x$$

と表せる．

(2)　検査体積の表面で，検査体積内の流体が受ける力の x 軸方向の成分を求めよ．ただし，平板に接する面を除いた検査体積表面に作用する粘性応力による x 軸方向の力を微小と仮定して無視する．

(3)　$\dot{m}(x)$ と $M(x)$ をそれぞれ次のように表して，検査体積内の流体に関する x 軸方向の運動量保存の式を示せ．

$$\dot{m}(x)=\rho\int_0^{h(x)} u(x,y)\ \mathrm{d}y\ ,\quad M(x)=\rho\int_0^{h(x)} (u(x,y))^2\ \mathrm{d}y$$

（次ページに続く）

問題２の続き

これ以降，平板が存在する $0 \le x \le L$ の範囲で，上流の流速 U で無次元化した流速 $u(x,y)/U$ が，y/h の関数（$u(y/h)/U$）であると仮定する．

(4) 問(3)で得られた式を変形することで，$\tau_w(x)$ と $h(x)$ の関係が次式で表されることを示せ．

$$\tau_w(x) = \rho U^2 a \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$$

ここで，a は次式で定義される定数である．

$$a \equiv \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}\mathrm{d}\left(\frac{y}{h}\right)$$

(5) せん断応力の定義に基づき，次式で定義される定数 b を用いて，$\tau_w(x)$ を表せ．

$$b \equiv \left(\frac{\mathrm{d}(u/U)}{\mathrm{d}(y/h)}\right)_{y/h=0}$$

(6) 問(4)で示した式に，問(5)で求めた $\tau_w(x)$ を代入して得られる，$h(x)$ に関する常微分方程式を示せ．

(7) 問(6)で求めた常微分方程式を解くことにより，$h(x)$ を求めよ．

(8) 平板の片面に作用する x 軸方向の力を $\rho U^2 L/2$ で無次元化して得られる，摩擦抗力係数 C_D を求めよ．

これ以降，$0 \le y/h \le 1$ の境界層内の流速分布が $\dfrac{u}{U} = \dfrac{y}{h}\left(2 - \dfrac{y}{h}\right)$ で与えられる場合を考える．

(9) a，b の値を求めたうえで，平板の後縁（$x = L$）における境界層厚さ $h(L)$，および摩擦抗力係数 C_D を求めよ．

(10) $U = 1.0\ \mathrm{m/s}$，$\nu = 1.0\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，$L = 0.20\ \mathrm{m}$ の場合の $h(L)$ と C_D の値を求めよ．

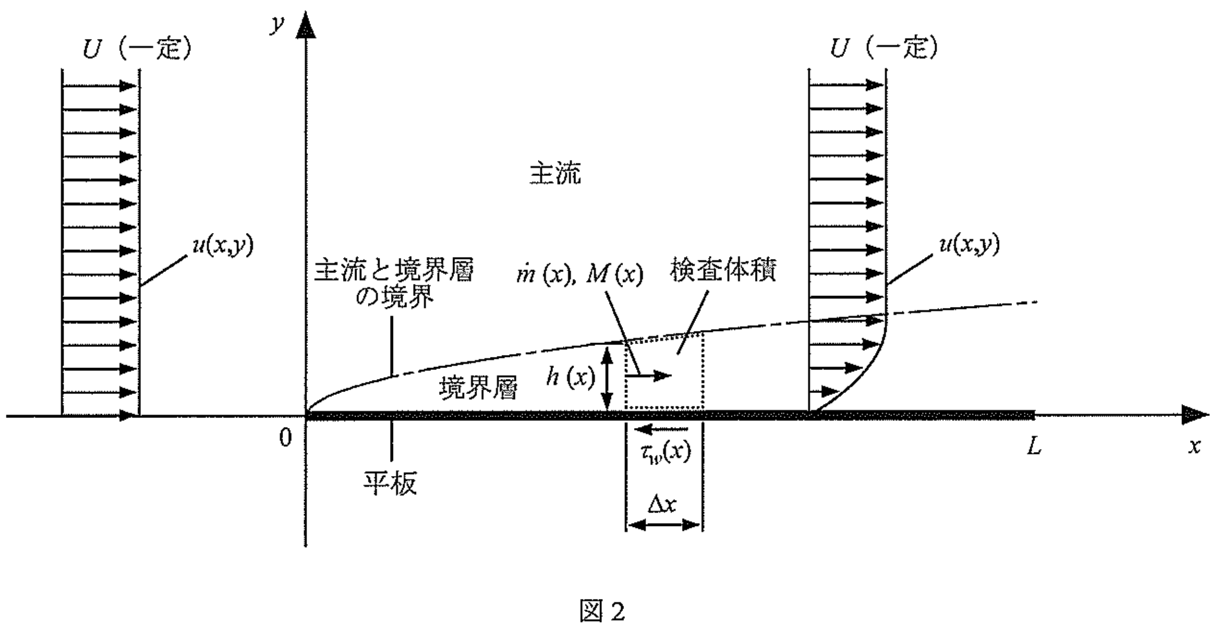

図２

問題 3

(1) 図 3-1 のようなシリンダに入った気体を考える．この気体の圧力 p，体積 V，絶対温度 T の間に，R を定数として

$$pV = RT \qquad \cdots(\mathrm{I})$$

の関係が成り立つとする．外部からシリンダ中の気体に何らかの操作をしたときの変化に関して以下の問に答えよ．

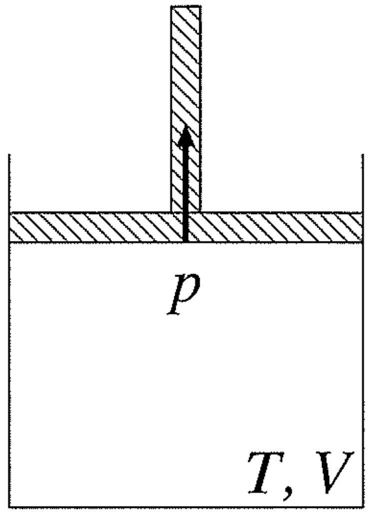

図 3-1

(a) 圧力 p を一定に保ってゆっくりと絶対温度 T を上昇させたときに気体の体積 V が増大するか減少するか，式 (I) に基づいて答えよ．

(b) 体積を微小量 ΔV だけ準静的に変化させたときに気体がされる仕事 ΔW を ΔV を使って表せ．

(c) 気体の体積 V を断熱準静的に変化させたときの絶対温度 T を V の関数として表せ．ただし，気体の内部エネルギーは C_V を定数として $U = C_V T$ で与えられ，$V = V_0$ では $T = T_0$ であるとする．

(d) 前問の結果を用いて，準静的に断熱膨張させたときに気体の絶対温度 T が上がるか下がるかを答えよ．

(2) 次に，図 3-2 のように端点を固定して，もう一方の端点を自然な長さから $a(> 0)$ だけ伸ばしたゴムを考える．このゴムの張力 f，伸び a，絶対温度 T の間に，κ を定数として

$$f = \kappa T a \qquad \cdots(\mathrm{II})$$

の関係が成り立つとする．(1) と同様に外部からゴムに何らかの操作をしたときの変化を考える．ゴムの状態が絶対温度 T と伸び a で決まる平衡状態にあると考えれば，この問題はシリンダ中の気体と同様に熱力学の枠組みで取り扱えることが知られている．このとき，ゴムの内部エネルギー U が定義でき，その変化 ΔU は外部から流入する熱量 ΔQ と外部からされる仕事 ΔW の和で表される．以下の問に答えよ．

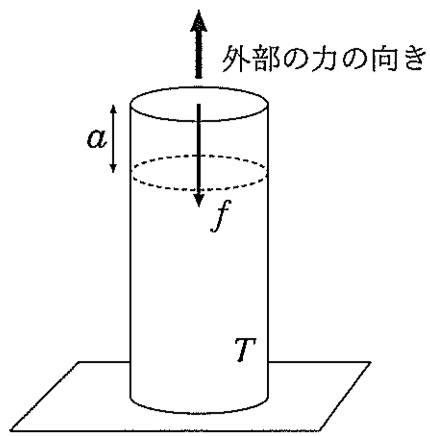

図 3-2

(次ページにつづく)

問題3の続き

(a) 張力 f を一定に保ってゆっくりとゴムの絶対温度 T を上昇させたときにゴムの伸び a が増加するか減少するか，式 (II) に基づいて答えよ．

(b) ゴムの伸びを微小量 Δa だけ準静的に変化させたときにゴムがされる仕事 ΔW を Δa を使って表せ．

(c) ゴムの伸びを 0 から a まで変化させる．この変化の過程では外部との熱のやりとりは無視でき，さらに，ゴムの伸びが変化する時間に比べてゴムの内部状態は十分に速く緩和すると考えて，操作は断熱準静的であると仮定する．このときの絶対温度 T をゴムの伸び a の関数として表せ．ただし，内部エネルギー U は C_a を定数として $U = C_a T$ で与えられ，$a = 0$ では $T = T_0$ であるとする．

(d) 前問の結果を用いて，断熱準静的にゴムを伸ばしたときに絶対温度が上がるか下がるかを答えよ．

(e) ゴムのヘルムホルツ自由エネルギー F を，ゴムのエントロピーを S として $F = U - TS$ で定義する．

$$f = \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_a$$

を示せ．ただし，$\left(\dfrac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z$ は，Z を固定したときの，X の Y に対する偏導関数を表す．

(f) マクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_a = -\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_T$$

を示せ．さらに，式 (II) を用いることで，絶対温度 T を一定に保ちながら準静的にゴムを伸ばしたときにゴムのエントロピーが増大するか減少するかを答えよ．