機械科学Ｉ

次ページから始まる問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．

問題１

連立微分方程式に関する以下の問に答えよ．なお，$(\dot{\ })$は時間微分$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$を，iは虚数単位（$i=\sqrt{-1}$）を表す．

(1) 直交座標系x_1，x_2における線形微分方程式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 - 2x_2\\ \dot{x}_2 &= 5x_1 - 3x_2\end{aligned} \tag{I}$$

を $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ を用いて $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ と表すとき，行列$\mathbf{A}$を求めよ．

(2) 実数α_nおよびβ_n，実ベクトル$\mathbf{p}_n$および$\mathbf{q}_n$（$n=1,2$）を用いて$\mathbf{A}$の固有値を$\alpha_n+i\beta_n$，対応する固有ベクトルを$\mathbf{p}_n+i\,\mathbf{q}_n$と表すとき，$\alpha_n$，$\beta_n$，$\mathbf{p}_n$，$\mathbf{q}_n$をそれぞれ求めよ．ただし，$\beta_1>\beta_2$ かつ $\mathbf{p}_1$および$\mathbf{p}_2$の第１成分を２とする．

(3) 問(2)で求めた $\mathbf{p}_1$と $\mathbf{q}_1$を用いて実行列 $\mathbf{P}=(\mathbf{p}_1\ \ \mathbf{q}_1)$ を考え，$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{u}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$で定義される直交座標系 u_1，u_2で式(I)を

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{II}$$

と表すとき，行列$\mathbf{B}$を求めよ．さらに，式(II)の一般解を求めよ．

(4) 時刻$t=0$で$\mathbf{u}_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$を通過する，式(II)の座標系$u_1$，$u_2$における解軌道を図示せよ．ここで，解軌道が二つの座標軸と交わる点を全て示せ．

(5) 式(II)の右辺に非線形項 $\mathbf{f}(\mathbf{u})=\begin{pmatrix}-u_1\sqrt{u_1^2+u_2^2}\\-u_2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\end{pmatrix}$を加えた座標系$u_1$，$u_2$における方程式

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{B}\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{u}) \tag{III}$$

を，$r\cos\theta=u_1$，$r\sin\theta=u_2$として，u_1，u_2を消去して極座標系r，θにおける方程式に変換せよ．

(6) 問(5)においてr，θ の$t=0$での初期値をr_0，θ_0 としたとき，式(III)の解の振る舞いの特徴を述べよ．

問題２

図 2-1 に示すように，質量の無視できる一辺の長さが a，他辺の長さが b のＬ字型の剛体棒が支点Ｏのまわりになめらかに回転できるように支持されている．剛体棒の長さ a の辺の一端には自然長が十分に長い質量の無視できるばね定数 k のばねが取り付けられ，長さ b の辺の一端には質量 m の質点が取り付けられている．初期状態では，長さ a の棒の方向は水平軸，長さ b の棒の方向は鉛直軸方向に一致しており，初期状態においてばねは自然長になるように調整されているものとする．質点は紙面に平行な平面内で運動するものとし，鉛直下向きに重力が作用するものとする．また，ばねの変形は鉛直軸方向内だけを考えればよい．初期状態において，質点に微小変位を与え，静かに放した．重力加速度の大きさを g，棒の角度変位を θ として，次の問に答えよ．

(1) 角度 θ の運動方程式を求めよ．

(2) 系が振動する条件を示し，系の固有角振動数を求めよ．ただし，$\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$ とする．

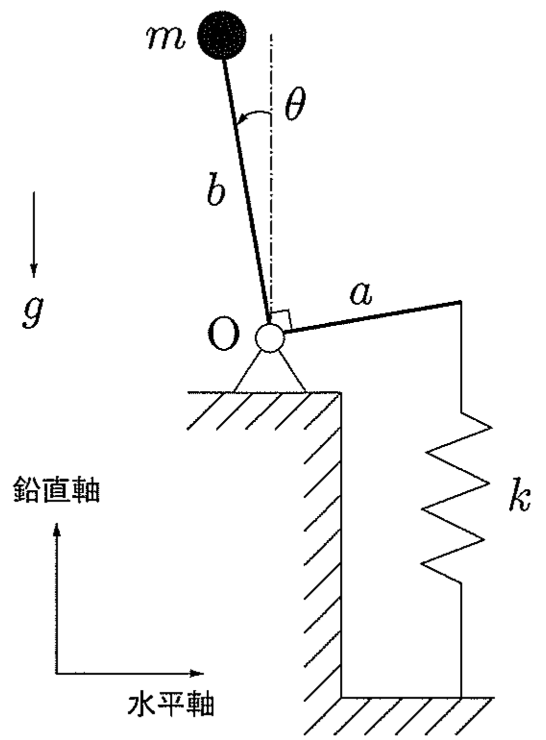

図 2-1

（次ページに続く）

問題２の続き

次に，図2-2に示すように，L字型剛体棒の長さ b の辺の一端に，質点の代わりに，「質量のない長さ l の剛体棒の先に質量 m の質点を取り付けた振り子」を取り付ける．初期状態では，長さ a の棒の方向は水平軸，長さ b の棒の方向は鉛直軸方向に一致しており，初期状態においてばねは自然長になるように調整されているものとする．剛体棒ならびに振り子はそれぞれ紙面に平行な平面内で運動するものとする．ただし，運動中，両者は衝突しないものとし，鉛直下向きに重力が作用するものとする．また，ばねの変形は鉛直軸方向内だけを考えればよい．初期状態において，L字型剛体棒および振り子にそれぞれ微小変位を与え，静かに放した．重力加速度の大きさを g，L字型剛体棒の角度変位を θ，振り子の角度変位を ϕ として，次の問に答えよ．

(3) 系の運動エネルギーを求めよ．

(4) 系のポテンシャルエネルギーを求めよ．

(5) 系の運動方程式が次のような形式で表現できることを示せ．

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}$$

ただし，

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{d\phi}{dt} \end{pmatrix},\ \ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ \dfrac{d^2\phi}{dt^2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ は 2×2 の対称行列，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ は 2×2 の歪対称行列(注)，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$ は 2×1 の縦ベクトルである．

また，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} h_{11}(\boldsymbol{q}) & h_{12}(\boldsymbol{q}) \\ h_{21}(\boldsymbol{q}) & h_{22}(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix}$ とすると，$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \dfrac{dh_{11}(\boldsymbol{q})}{dt} & \dfrac{dh_{12}(\boldsymbol{q})}{dt} \\ \dfrac{dh_{21}(\boldsymbol{q})}{dt} & \dfrac{dh_{22}(\boldsymbol{q})}{dt} \end{pmatrix}$ である．

(6) 系の運動方程式の両辺と $\dot{\boldsymbol{q}}$ との内積をとることにより，エネルギー保存則が成り立つことを確かめよ．

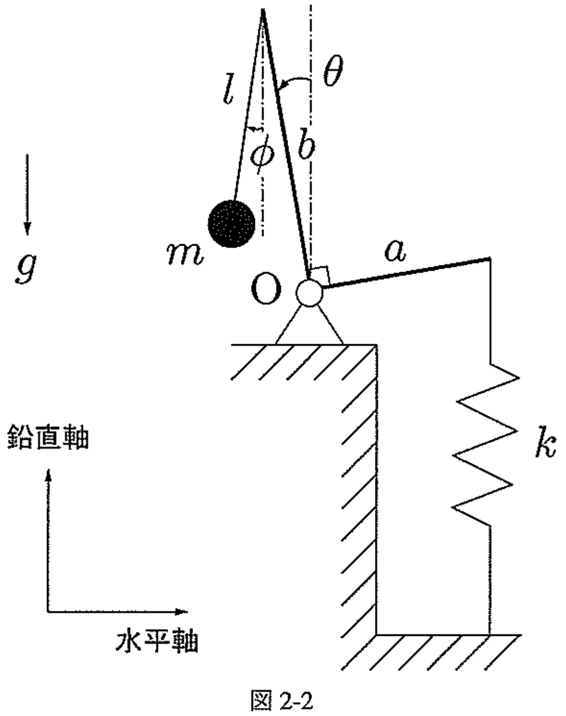

図 2-2

(注) 正方行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ を満たすとき，$\boldsymbol{A}$ は歪対称行列であるという．ただし $(\cdot)^T$ は行列 $(\cdot)$ の転置行列を表す．

問題３

図 3(a)に示すように，両端を固定支持された長さ L の一様なはり AB に単位長さ当たり w の等分布荷重を負荷した．このはりの中心点を C とし，曲げ剛性を EI として，以下の問に答えよ．ただし，はり AB の自重は無視できるものとする．

(1) はりABの両端に生じる支持反力および反モーメントを求めよ．

(2) はりABの曲げモーメント図を描くとともに，曲げモーメントの大きさが最大となる位置xを求めよ．

(3) はりABのたわみ曲線を求めるとともに，C点に生じるたわみδを求めよ．

(4) 図3(b)に示すように，C点にばね定数kの圧縮ばねを自然長の状態で取り付け，はりABに等分布荷重wを負荷したところ，C点に生じるたわみδ^*は問(3)におけるたわみδの半分となった．このとき，C点に取り付けた圧縮ばねのばね定数kを求めよ．

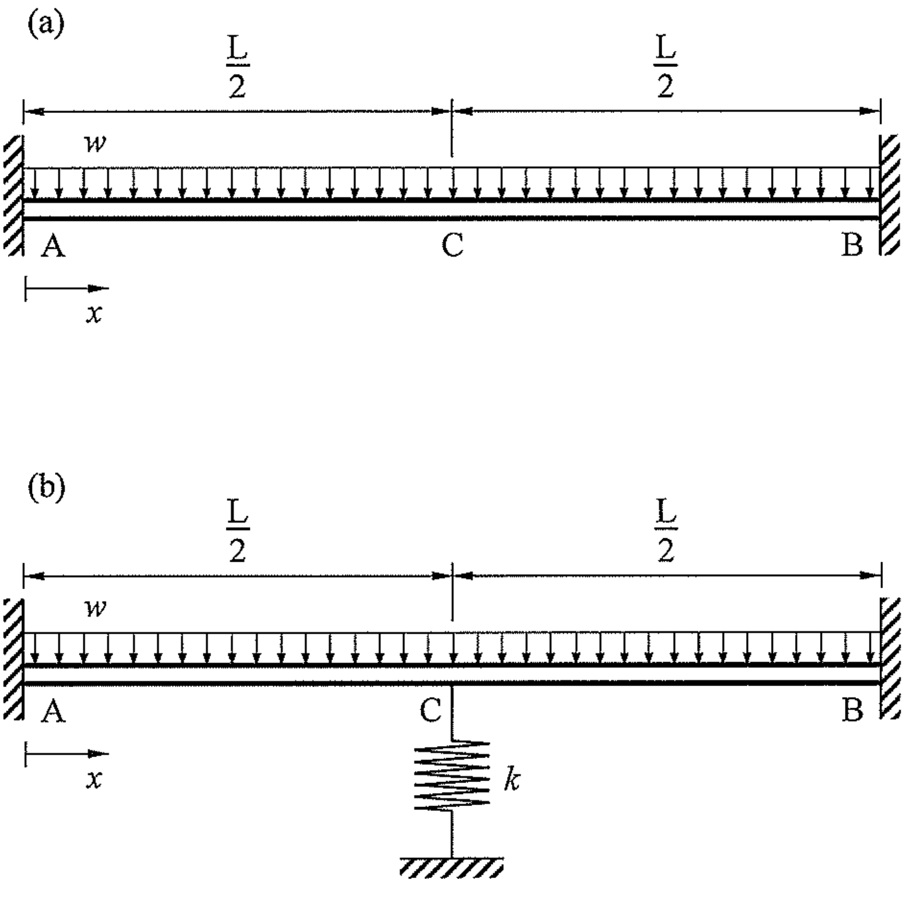

図 3