機械科学II

(問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目)」などのように記入せよ．)

問題１

連立常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= Ax - Bxy \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -Cy + Dxy \end{aligned} \tag{1}$$

について以下の問に答えよ．ただし，A，B，C，D は正の実数の定数とする．$x(t)$ と $y(t)$ は時間 t の実関数であり，その時間変化は xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ の軌道で表される．

（１）xy 平面上に，原点以外の固定点が 1 つあり，それを $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ とする．x_0 と y_0 を A，B，C，D のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．ただし，固定点とは，xy 平面上において，点Pが時間的に変化しない位置とする．

（２）$x(t)$ と $y(t)$ の時間変化は周期的であり，その周期はいずれも T である場合を考える．また，点Pの軌道は固定点を通らず，$x(t)>0$，$y(t)>0$ とする．このとき，$x(t)$ と $y(t)$ の 1 周期の時間平均を，それぞれ $\overline{x}$ と $\overline{y}$ とする．$\overline{x}$ と $\overline{y}$ を A，B，C，D のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

以降では，原点から十分に離れた固定点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ の近傍の微小変位を考える．ここで，$x(t)=x_0+u(t)$，$y(t)=y_0+v(t)$ とおく．すなわち，$t>0$ において，$u(t)$ は x_0，$v(t)$ は y_0 に対して，それぞれ十分に小さいとする．ただし，$u(0)=u_0$，$v(0)=0$ とする．

（３）u と v を使って式(1)を書き換え，u と v の t に関する連立常微分方程式を導け．

（４）問（３）の方程式を解くことにより，$u(t)$ と $v(t)$ を，t，u_0，A，B，C，D のうち必要なものを用いてそれぞれ求めよ．

（５）$u(t)$ と $v(t)$ の時間変化を uv 平面上の点 $\mathrm{Q}(u,v)$ の軌道で表現する．軌道の概略図を描け．ただし，軌道が u 軸および v 軸と交差する場合は，その交点の位置と座標をすべて示せ．

（６）$x(t)$ と $y(t)$ の周期を，A，B，C，D のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

問題2

図2-1に示す長さaの片持ちはりAB，および図2-2に示すL型はりCDE（CD間の長さはa，DE間の長さはL，∠CDEは直角）について考える．片持ちはりABは鉛直剛体壁に対して垂直に取り付けられており，L型はりCDEは片側端部の点Eにおいて水平剛体床に対して垂直に固定されている．図2-1中の点Aから点B，あるいは図2-2中の点Cから点Dに向かう方向にx軸，図2-2中の点Dから点Eに向かう方向にy軸をとる．片持ちはりABとL型はりCDEの断面2次モーメントはそれぞれI_1，I_2で表され，はりはいずれも同一の材料（縦弾性係数E）からなる細長い一様な断面の丸棒である．

片持ちはりABの先端（点A），およびL型はりCDEの先端（点C）に荷重Pを鉛直下向きに作用させる．曲げによるはりのたわみ変形のみを考え，自重は無視できるものとして，以下の問に答えよ．

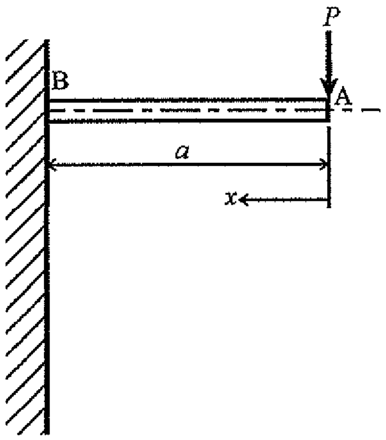

図2-1

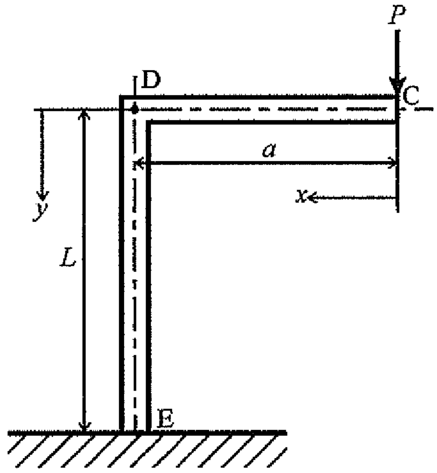

図2-2

（1） 片持ちはりABとL型はりCDEの曲げモーメント線図をそれぞれ示せ．

（2） 片持ちはりABとL型はりCDEに蓄えられるひずみエネルギーU_1, U_2をそれぞれ求めよ．

（3） 片持ちはりABの先端（点A）における鉛直方向の変位δ_1を求めよ．

（4） L型はりCDEの先端（点C）における鉛直方向の変位δ_2を求めよ．

（5） $\delta_1 = \delta_2$となるとき，片持ちはりABの断面直径d_1とL型はりCDEの断面直径d_2の比d_2/d_1を求めよ．

（6） L型はりCDEの先端（点C）の水平方向の変位δ_3を求めよ．

（7） $\delta_2 = \delta_3$となるとき，L型はりCDEのCD間の長さaとDE間の長さLの比L/aを求めよ．

問題３

無限平行平板間の流れ (図 3-1) について，流体を駆動する圧力勾配と，磁気の作用による体積力の影響を考えていく．流体は，粘性 (粘度 μ 一定) と導電性 (導電率 σ 一定) のある非圧縮性流体であり，2 つの静止平板の壁面 $y=-h$，$y=h$ に，滑り速度ゼロで接する．圧力 p は，$-\partial p/\partial x = A\ (>0)$ が平板間全体にわたり一定となるように分布する．流れは定常な層流であり，流速ベクトルの成分は，x 方向成分 u 以外がゼロである．u は座標 y のみの関数である (すなわち $u=u(y)$).

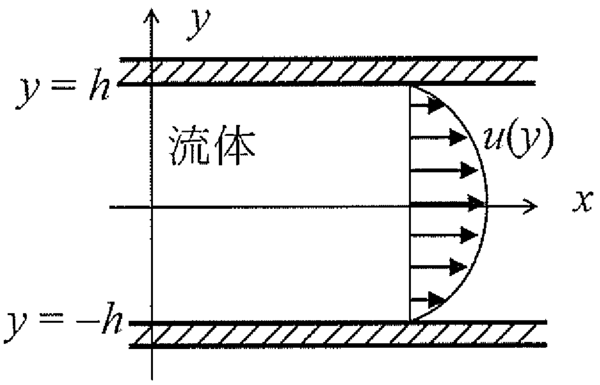

図 3-1

まず，磁場のない場合 (変数には下添字 0 を付記) を考える．流体の微小要素に働く力のつりあいから次式が与えられる．

$$0 = A + \mu\frac{\mathrm{d}^2 u_0}{\mathrm{d}y^2} \tag{1}$$

以下の問に答えよ．

（1） 流速 u_0 の壁面での境界条件を書け．

（2） 壁面での境界条件を考慮して式(1)を解き，流速分布 $u_0(y)$ を求めよ．

（3） 壁面せん断応力を τ_w と記す（τ_w の符号は，板に働く摩擦力が $+x$ 方向である場合に正とする)．磁場のない場合，$y=-h$，$y=h$ における壁面せん断応力 $\tau_{\mathrm{w}0}\big|_{y=-h}$，$\tau_{\mathrm{w}0}\big|_{y=h}$ を，μ, A, h のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

（4） 2 つの壁面せん断応力の平均を $\langle\tau_\mathrm{w}\rangle \equiv \dfrac{\tau_\mathrm{w}\big|_{y=-h}+\tau_\mathrm{w}\big|_{y=h}}{2}$ と記す．式(1)を区間 $-h \le y \le h$ で y 方向に積分することで，$\langle\tau_{\mathrm{w}0}\rangle = Ah$ の関係が成り立つことを示せ．

（5） 紙面垂直方向（z 方向）単位厚みあたりの体積流量を $Q \equiv \int_{-h}^{h} u\,\mathrm{d}y$ と記す．磁場のない場合の体積流量 Q_0 を，μ, A, h のうち必要なものを用いて表せ．

（次ページにつづく）

問題３の続き

次に，磁気作用が加わることによる，壁面せん断応力と体積流量の変化を見ていく．y 方向を向く一様磁場 (磁束密度の y 方向成分 B 一定) の中に図 3-1 の系がある場合，磁気と流れの複合効果として，流体には x 方向の体積力 $-\sigma B^2 u$ が作用する．流体の微小要素に働く力のつりあいから次式が与えられる．

$$0 = A + \mu\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} - \frac{\beta^2 \mu}{h^2}u \tag{2}$$

ここで，$\beta = (\sigma/\mu)^{1/2} h|B|(>0)$ は磁気作用の強さを表す無次元量である．以下の問に答えよ．

（６）　式(2)を満たす流速分布 $u(y)$ が，

$$u(y) = \frac{Ah^2}{\beta^2 \mu}\left(1 + C_1 \mathrm{e}^{\beta y/h} + C_2 \mathrm{e}^{-\beta y/h}\right)$$

と書けることを示せ．また，壁面での境界条件を満たす C_1, C_2 を，β, μ, A, h のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

（７）　$\langle \tau_\mathrm{w} \rangle$，および，$Q$ を，β, μ, A, h のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

（８）　式(2)を y 方向に積分し，$\langle \tau_\mathrm{w} \rangle + \dfrac{\beta^2 \mu}{2h^2}Q = Ah$ の関係が成り立つことを示せ．

（９）　磁気作用が弱い場合（$0 < \beta \ll 1$）を考える．磁場のない場合に比べて，磁気作用が加わることによる $\langle \tau_\mathrm{w} \rangle$，$Q$ の微小な変化は，

$$\frac{\langle \tau_\mathrm{w} \rangle}{\langle \tau_\mathrm{w0} \rangle} - 1 \approx C_3 \beta^2, \quad \frac{Q}{Q_0} - 1 \approx C_4 \beta^2$$

と近似できる．係数 C_3, C_4 の値をそれぞれ求めよ．なお，$0 < \xi \ll 1$ の場合に成り立つ以下の関係式を用いてよい．

$$\mathrm{e}^{\pm\xi} \approx 1 \pm \xi + \frac{\xi^2}{2} \pm \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^4}{24} \pm \frac{\xi^5}{120}, \quad \tanh\xi = \frac{\mathrm{e}^{\xi} - \mathrm{e}^{-\xi}}{\mathrm{e}^{\xi} + \mathrm{e}^{-\xi}} \approx \xi - \frac{\xi^3}{3} + \frac{2\xi^5}{15}, \quad \coth\xi = \frac{\mathrm{e}^{\xi} + \mathrm{e}^{-\xi}}{\mathrm{e}^{\xi} - \mathrm{e}^{-\xi}} \approx \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{3} - \frac{\xi^3}{45}$$

（１０）　磁気作用が強い場合（$\beta \gg 1$），$\langle \tau_\mathrm{w} \rangle / \langle \tau_\mathrm{w0} \rangle$，$Q/Q_0$ は，

$$\frac{\langle \tau_\mathrm{w} \rangle}{\langle \tau_\mathrm{w0} \rangle} \approx C_5 \beta^m, \quad \frac{Q}{Q_0} \approx C_6 \beta^n$$

と近似できる．係数 C_5, C_6，および，指数 m, n の値をそれぞれ求めよ．なお，$\xi \to \infty$ の場合に成り立つ以下の関係式を用いてよい．

$$\mathrm{e}^{-\xi} \approx 0, \ \mathrm{e}^{\xi} \approx \infty, \ \tanh\xi \approx 1, \ \coth\xi \approx 1$$