機械科学Ｉ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題１

n 次のエルミート行列 $\mathbf{H}$（すなわち $\mathbf{H}=\mathbf{H}^*$）について以下の問に答えよ．ただし，行列あるいはベクトルの随伴を $(\cdot)^*$，複素共役を $\overline{(\cdot)}$，転置を $(\cdot)^T$ で与えるとし，$(\cdot)^*=\overline{(\cdot)}^T$ である．

（１）$\mathbf{H}$ と n 次の任意の複素ベクトル $\mathbf{x}$ を用いて定義されるスカラー $\mathbf{x}^*\mathbf{H}\mathbf{x}$ を考える．スカラーは自身の転置と等しく，実数は自身の複素共役と等しいことを利用して，$\mathbf{x}^*\mathbf{H}\mathbf{x}$ が実数であることを示せ．

（２）λ を $\mathbf{H}$ の固有値，$\mathbf{u}$ を対応する固有ベクトルとするとき，

$$\mathbf{u}^*\mathbf{H}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}^*\mathbf{u}$$

と書ける．このことから，$\mathbf{H}$ の固有値は実数となることを示せ．

（３）$\mathbf{H}$ の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ．

以降では，$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$ の場合について解答せよ．ただし，i は虚数単位（$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$）を表す．

（４）$\mathbf{H}$ の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，各固有ベクトルの第１成分を１とする．

（５）適当なユニタリ行列 $\mathbf{U}$（すなわち $\mathbf{U}^*\mathbf{U}=\mathbf{U}\mathbf{U}^*=\mathbf{E}$，$\mathbf{E}$ は単位行列）によって $\mathbf{H}$ を

$$\mathbf{U}^*\mathbf{H}\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

のように変換できることを示し，$\mathbf{U}$ および $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ とする．

（６）$\mathbf{H}^{2m-1}$ および $\mathbf{H}^{2m}$（m は自然数）をそれぞれ求めよ．

問題２

図２-１に示すように，質量 m の２つのおもりが，長さ L の４つの剛体リンクからなる xz 面内の平面機構によって，鉛直 z 軸に対し対称に配置されている．各リンクは関節部（O，A，B，C）において平面内を自由に回転できるが，関節Oの位置は原点に，関節Bの位置は z 軸上に拘束されている．また，関節Oと関節Bの間には，ばね定数 k，自然長 $2L$ の線形ばねが取り付けられている．この平面機構が xz 座標とともに z 軸まわりに一定の角速度 ω で回転するとき，次の問に答えよ．以下，おもりを関節A，Cに集中した質点として扱い，その他の機械要素（ばね，リンク）の質量，および運動に伴う摩擦の影響は無視できるものとする．また，関節Bの移動範囲は $0<z<2L$ とし，リンクOAの関節Oまわりの角度を θ，重力加速度の大きさを g とする．

（１）リンクABに働く軸力を f_1 とするとき，関節Bにおける力のつりあいの関係を示せ．ただし，軸力は引張力を正とする．

（２）リンクABに働く軸力を f_1，リンクOAに働く軸力を f_2 とするとき，x 方向および z 方向のおもりの運動方程式を求めよ．ただし，軸力は引張力を正とする．

（３）問（１），（２）の結果から f_1，f_2 を消去することにより，xz 平面内の θ に関する系の運動方程式を導け．

（４）θ を一般化座標として，系の運動エネルギーを求めよ．

（５）θ を一般化座標として，系のポテンシャルエネルギーを求めよ．

（６）問（４），（５）の結果から θ に関する系の運動方程式を導き，問（３）の結果と一致することを示せ．

（７）$\Omega_1=\sqrt{\frac{g}{L}}$, $\Omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}$ とするとき，系の平衡点を ω，Ω_1，Ω_2 を用いて表せ．また，解が存在するための条件を示せ．

（８）問（７）で求めた平衡点まわりでおもりが微小振動するとき，その固有角振動数を ω，Ω_1，Ω_2 を用いて表せ．

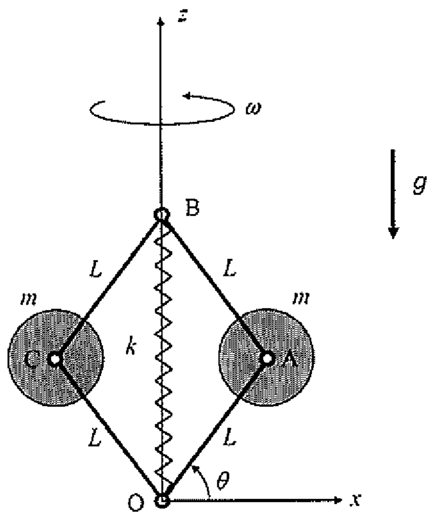

図２-１

問題 3

（熱機関に関する問(1)，(2)の両方を解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ.）

(1) 作動流体を質量 m の理想気体として，有限の速さで駆動させた図3-1のサイクルを考える．このサイクルでは，断熱変化と絶対温度 T_H と T_L（$T_\mathrm{H} > T_\mathrm{L}$）の熱源に接触させた状態変化を組み合わせており，$T$ を作動流体の絶対温度，V をその体積とする．また，R はこの気体の気体定数であり，p を圧力として $pV = mRT$ の関係式が成立する．体積を変化させる速さは一定で，サイクルを１周させるのにかかる時間を τ とする．1→2 と 3→4 の変化では，絶対温度 T_H と T_L の熱源と接触させるが，有限の速さで稼働させているため気体は熱源の温度とずれた，それぞれ絶対温度 $T_\mathrm{H} - \Delta T$ と $T_\mathrm{L} + \Delta T$ の平衡状態にあると仮定する．2→3 と 4→1 は断熱変化とする．ΔT は0以上の値を持ち，$\tau \to \infty$ の準静的な極限でのみ $\Delta T = 0$ となる．また，$T_\mathrm{H} - \Delta T > 0$ とする．さらに，１，２，３，４の状態での体積をそれぞれ V_1，V_2，V_3，V_4 として，これらは τ に依存せず，$V_1 < V_2$ とする．

(a) 熱源に接した状態で体積を $\mathrm{d}V$ だけ変化させたときに系が外部に行う仕事は $p\mathrm{d}V$ で与えられると仮定する．1→2 の過程で温度 T_H の熱源から吸収する熱量 Q_H を求めよ．

(b) 3→4 の過程で温度 T_L の熱源に排出する熱量 Q_L を求めよ．

(c) 準静的な断熱過程では理想気体の温度 T と体積 V は γ を比熱比（定圧比熱を定積比熱で除した無次元量）として $TV^{\gamma-1} = \mathrm{const.}$ となる．ただし，γ は温度によらず一定とする．準静的な極限 $\tau \to \infty$ での 2→3 と 4→1 の断熱変化を考えて V_2/V_1 と V_3/V_4 の関係を求めよ．

(d) サイクルを１周させて系が外部にした仕事を W とする．効率 η を $\eta = W/Q_H$ で定義する．η を T_H，T_L，ΔT だけを用いて表せ．

(e) $\eta \leq \eta_c$ を示せ．ただし，$\eta_c = 1 - \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$ とする．

(f) 単位時間あたりに熱機関が行う仕事の大きさを表す仕事率 P を $P = W/\tau$ で定義する．効率が η_c となるようにサイクルを駆動させた場合の仕事率 P の値を求めよ．

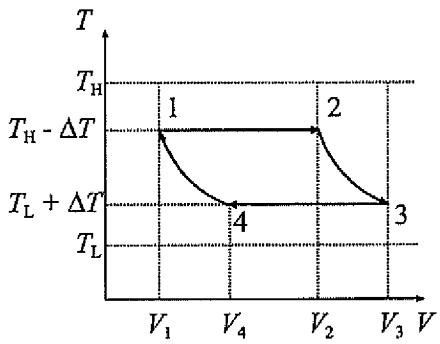

図3-1

(次ページにつづく)

問題 3の続き

(2) (1)のサイクルをどの程度ゆっくり駆動させると準静的な変化とみなせるかを考えるために，図3-2のように一定の温度 T_H に保たれた熱源に容器を接触させたまま，ピストンを動かし体積を少しだけ増大させる場合を考える．ピストンを動かしたことにより，ピストン近傍の気体の温度は，T_H から下がる．特に，ピストンを動かし終えた時刻 $t=0$ での温度分布を

$$T(x,t=0)=T_\mathrm{H}-D\,\delta(x) \qquad \cdots(\mathrm{I})$$

とする．ここで，D は定数で，気体の温度を $T(x,t)$ と表し，$0 \le x \le L$ とする．また，$f(x)$ を任意関数として $\int_0^L f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(0)$ とする．$x=0$ は $t=0$ でのピストンとの境界面で断熱壁と考える．$x=L$ は熱源と接する面であり，この面における気体の温度は T_H に保たれると仮定する．また，シリンダの側面も断熱壁であるとする．熱拡散率を α とし，シリンダの中で対流は起きないと仮定して，x 方向のみの熱伝導を考える．

(a) $\Theta(x,t)=T(x,t)-T_\mathrm{H}$ として $\Theta(x,t)$ の従う方程式を書け．
(b) $x=0$ および $x=L$ において $\Theta(x,t)$ が満たす境界条件を書け．
(c) $\Theta(x,t)=X(x)\,Y(t)$ として，(a) から $X(x)$ および $Y(t)$ がそれぞれ満たすべき方程式を求めよ．
(d) (c) で導出した方程式から (b) の境界条件を満たす解を求め，$\Theta(x,t)$ をそれらの解の重ね合わせとして表せ．
(e) (d) の結果と 式 (I) を用いて，$T(x,t)$ を求めよ．
(f) (e) の結果から $x=0$ での温度を求めよ．また，求めた温度がどの程度の時間で熱源の温度 T_H に緩和するか議論せよ．

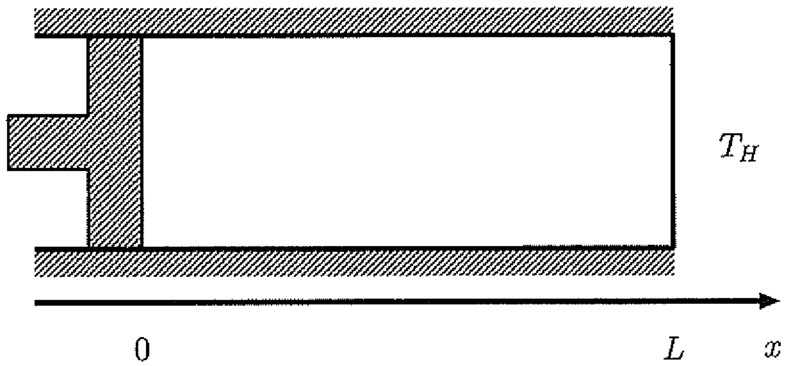

図 3-2