機械科学Ⅱ

(問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目)」などのように記入せよ.）

問題１　(次の（1），（2）の両方を解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ.）

（1）XY 平面上（$X \geq 0$, $Y \geq 0$）を移動する点Ｐおよび点Ｑを考える．時刻 t における点P，点Ｑの位置をそれぞれ $\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$ と表す．$t=0$ のとき，点Ｐは $\mathrm{P}(0)=(0, a)$（ただし，$a>0$）に，点Ｑは $\mathrm{Q}(0)=(0, 0)$ に位置している．その後，点Ｑが速さ V_Q（ただし，$V_\mathrm{Q}>0$）で X 軸上を正方向に移動し始めるのと同時に，点Ｐは速さ V_P（ただし，$V_\mathrm{P}>0$）で $\overrightarrow{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}$ の方向に向かって移動し続け，点Ｑを追跡する（図2-1）．V_P, V_Q は一定であり，点Ｐの進行経路の接線は常に点Ｑの方向を向いているものとする．$\mathrm{P}(t)=(x, y)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(a) 時刻 t における線分PQの傾き $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を x, y, t, V_Q を用いて表せ．

(b) 点Ｐの経路 $x(y)$ は次の微分方程式で表されることを示せ．ただし，$u=\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$，$k=V_\mathrm{Q}/V_\mathrm{P}$ とする．

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=k\sqrt{1+u^2}, \qquad u\big|_{y=a}=0 \tag{1}$$

(c) $f(u)=u+\sqrt{1+u^2}$ について，$\dfrac{\mathrm{d}f/\mathrm{d}u}{f(u)}$ を求めよ．

(d) $k=1$ の場合について，(1)式から $x(y)$ を導出せよ．

(e) $k \neq 1$ の場合について，(1)式から $x(y)$ を導出せよ．

(f) $k<1$ のとき，点Ｐは点Ｑに追いつくことができる．その時刻を a, V_P, V_Q を用いて表せ．

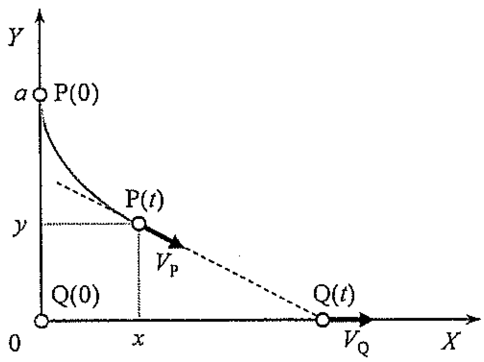

図2-1

（次ページにつづく）

問題１の続き

（2）漸化式

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

について以下の問に答えよ．ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$とする．

(a) 上の漸化式を$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$の形で表すとき，行列$\mathbf{A}$を求めよ．

(b) $\mathbf{A}$の固有値 λ_1 および λ_2 を求めよ．また，$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$および$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$が λ_1 および λ_2 にそれぞれ対応する固有ベクトルであることを示せ．

(c) $\mathbf{A}^n$を λ_1 と λ_2 を用いて表せ．

(d) $x_0 = 0$，$x_1 = 1$とするとき，x_nを求めよ．

(e) 問(d)のとき，$\lim_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$を求めよ．

問題２

長さ L，せん断弾性係数（剛性率）G を持つ円管のねじり変形について，以下の問に答えよ．

（１） 図２-２は，内径 d_1，外径 d_2 の円管の断面である．この断面の断面二次極モーメント（極慣性モーメント）を導出せよ．

（２） この長さ L の円管の両端にトルク T が作用しているとき，ねじり角 Φ を求めよ．

以下の問では，図２-３に示すような直径 d に比べて肉厚 t（一定）が非常に小さい（$t << d$）断面を持つ薄肉円管について考える．

（３）この薄肉円管の断面二次極モーメント I_p が，次式で与えられることを，（１）の結果より導け．

$$I_p = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

（４）図２-４に示すように，直径 $d = d_0$ の薄肉円管 AB の両端にトルク T が作用しているとき，この薄肉円管断面に作用するせん断応力 τ_0 とねじり角 Φ_0 を求めよ．ただし，薄肉のため円管断面内のせん断応力は一定とする．

次に，図２-５に示すような長さ L，肉厚 t の緩やかなテーパーの付いた薄肉円管 AB の両端にトルク T が作用している場合を考える．A, B での直径はそれぞれ d_0, αd_0（$\alpha > 0$）であり，管材のせん断弾性係数（剛性率）は G である．また，A から B に向かって x 軸をとる．

（５）A, B でのせん断応力 τ_A と τ_B を求め，それらの大小関係を示せ．

（６）位置 x における断面二次極モーメント $I_p(x)$ を求めよ．

（７）テーパー付き薄肉円管 AB のねじり角 Φ_1 を求め，比 Φ_1/Φ_0 を α を用いて示せ．

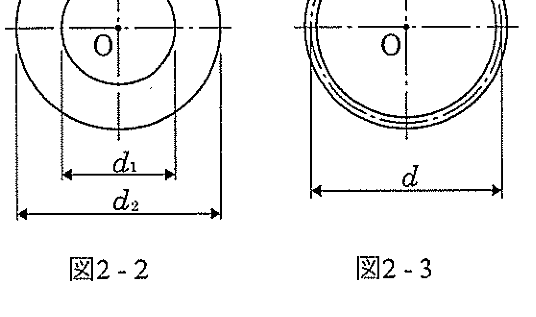

図2 - 2　図2 - 3

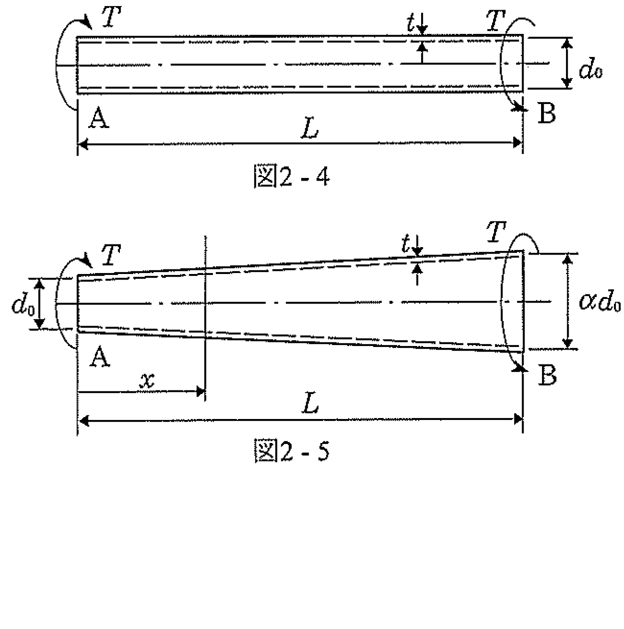

図2 - 4

図2 - 5

問題3

図 2-6 に示すように，一端が固定され，他端が自由な，はりの微小な曲げ振動を考える．時刻 t で，はりの中心線に沿う座標 x における y 方向のたわみを $y(x,t)$ とし，はりの断面積を A，断面 2 次モーメントを I，材料の縦弾性係数を E，密度を ρ，x 断面に作用する曲げモーメントおよびせん断力をそれぞれ M および S，はりに作用する y 方向の外力の分布を $p(x,t)$ とする．たわみ $y(x,t)$ は下向きを正とし，モーメント M ははりの上側圧縮を正，せん断力 S は下向きを正とする．はりの全長は L であり，A，I，ρ は全長にわたって一定とする．はりの断面の重心が x 軸上にある直線ばりを考え，粘性減衰，せん断変形，回転および重力の影響は無視できるものとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 微小要素 dx に注目し，モーメントのつりあいを M, S, x を用いて示せ．ここで，たわみは微小であるとし，dx の 2 次以上の項を無視するものとする．

(2) 微小要素 dx の運動方程式を ρ, A, S, p, y, x, t を用いて示せ．

(3) 傾き角 $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ が十分小さいとき，曲げモーメントとたわみの関係は $\dfrac{M}{EI} = -\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ で与えられる．このとき，問 (1) の結果を考慮して，問 (2) の運動方程式が

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + p(x,t)$$

と書けることを示せ．

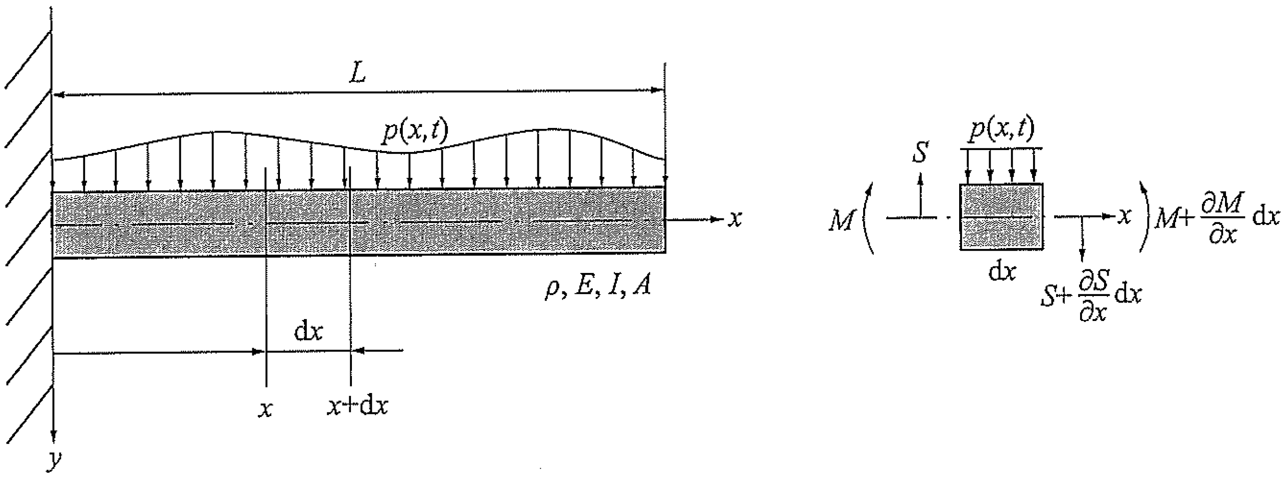

図 2-6

次に，$p(x,t)=0$ の場合について考える．

(4) $y(x,t) = X(x)T(t)$ と変数分離するとき，$X(x)$ および $T(t)$ の満たすべき常微分方程式を導出せよ．

(5) $x=0$ が固定端，$x=L$ が自由端である場合について，固有角振動数の満たすべき方程式を導出し，i 次の固有関数 $X_i(x)$ $(i=1,2,\cdots)$ を任意定数を含む形で示せ．

(6) 初期条件が，$y|_{t=0} = \phi_0(x)$, $\left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ で与えられるとき，$y(x,t)$ を $X_i(x)$ を用いて示せ．

（次ページにつづく）

問題3の続き

次に，$x = \dfrac{L}{2}$ の位置に $p(x,t) = F_0\,\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)\sin\omega t$ の外力が与えられる場合について考える．ただし，$\delta(x)$ はデルタ関数である．

(7) 角振動数 ω で振動する解 $y(x,t)$ を $X_i(x)$ を用いて示せ．