機械科学 Ｉ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題１ （次の（１）（２）の両方を解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．）

（１）定圧比熱 c_p，定積比熱 c_v，気体定数 R の理想気体のサイクル（循環過程）に関する以下の問に答えよ．ただし，c_p，c_v は一定とみなせる．

図１－１に示すサイクル $1 \to 2 \to 3 \to 1$ に従って気体の状態を変化させる．状態 1 の気体の圧力は p_1，体積は V_1，絶対温度は T_1 である．状態 1 の気体を体積 V_2 ($> V_1$) になるまで真空の周囲に対して急激に断熱膨張させ，十分時間が経過すると，気体は状態 2 となる．状態 2 の気体を，体積を V_2 に保ちながら，圧力 p_1 になるまでゆっくりと加熱し，状態 3 を得る．状態 3 の気体を，圧力を一定に保ちながら，体積 V_1 になるまでゆっくりと圧縮し，気体を状態 1 に戻す．このサイクルをサイクル A とよぶ．

(a) 状態 2 および状態 3 における気体の絶対温度をそれぞれ求めよ．

(b) サイクル A について熱力学第 1 法則を考え，Mayer の関係式

$$c_p - c_v = R$$

が成り立つことを示せ．

(c) サイクル A に関する Clausius の積分

$$\oint \frac{\mathrm{d}'Q}{T}$$

を計算し（T は熱源の絶対温度，$\mathrm{d}'Q$ は無限小過程において熱源から得る熱量），サイクル A は可逆か不可逆かを判定せよ．

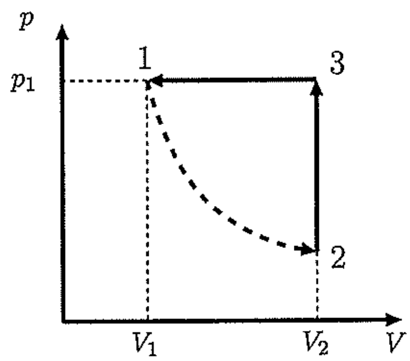

図１－１

サイクル A における状態変化 $1 \to 2$ を，気体を一定温度 T_1 の熱源と接触させながら，ゆっくりと体積 V_1 から体積 V_2 まで膨張させる状態変化に変更したサイクル B を考える．

(d) サイクル B に関する Clausius の積分を計算し，サイクル B は可逆か不可逆かを判定せよ．

サイクル A における状態変化 $1 \to 2$ を，気体を周囲から断熱して，ゆっくりと体積 V_1 から体積 V_2 まで膨張させる状態変化に変更したサイクル C を考える．

(e) サイクル A，サイクル B，サイクル C において気体が周囲からされる仕事を比較し，それらの大小関係を示せ．

（次ページにつづく）

問題 1 の続き

（2）熱伝導率 k が絶対温度 T の関数として，$k = \alpha T^{\beta}$ （α と $\beta\ (\neq -1)$ は定数）と表される物質内の一次元（x 方向）の熱伝導を考える．物質の温度は位置 x のみに依存するとし，$x = 0$ および $x = L$ における物質の温度をそれぞれ T_0 および T_L に保つ．十分に時間が経過した後の，位置 x （$0 \leq x \leq L$）における物質の温度を $T(x)$ と表す．このとき，以下の問に答えよ．

(a) $T(x)$ を求めよ．

(b) x 方向の熱流束を求めよ．

(c) 一般に，温度の上昇とともに，金属の熱伝導率は小さくなり，気体の熱伝導率は大きくなる．その理由を，金属中と気体中の熱伝導の仕組みを交えて説明せよ．

(d) $|T_0 - T_L|/T_0 \ll 1$ のとき，k の T 依存性は無視でき，$\beta = 0$ で近似できる．この場合，(a) で求めた $T(x)$ は，$T(0) = T_0$，$T(L) = T_L$ の条件のもと，

$$P = \int_0^L k \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x$$

の極値を与えることを示せ．

問題２

直流電動機(DC モータ)の原理に関連し，図 1-2, 1-3 に示すような，水平方向に一様な磁場が生じるよう対向して置かれた永久磁石間のロータの回転運動を考える．ロータは，円柱形状で非磁性体の“芯”と，芯の回転軸を通る断面の形状に合わせて矩形に導線を巻いた“巻き線”とで構成される．静止しているロータに電源電圧を入力して巻き線に電流を流すと，ローレンツ力によるトルクが生じ，ロータは回転運動をする．その際，ロータの回転運動によって巻き線に誘導起電力が発生し，ロータには電源電圧と逆向きの電圧(逆起電力)が生じる．

直流電源，抵抗，インダクタンスからなる電気回路から，ローレンツ力によるトルクの向きが同じになるように，“ブラシ・整流子”によって巻き線に電流を流す．本問では，n 回巻きの巻き線が，回転軸周りに角度を変えて，複数個取り付けられたロータを想定する(図 1-2, 1-3 では，簡単のため，1 回巻きの巻き線が，1 個取り付けられたロータを示す)．巻き線の個数・取り付け方およびロータの回転角度によらず，ローレンツ力によりロータに生じるトルクの大きさ，およびロータの回転によって生じる逆起電力の大きさは，巻き線 1 個が図 1-3 の水平位置に来たときのそれぞれの値と等しいと仮定する．このとき，電気回路はロータの回転によって生じる逆起電力を含め，図 1-4 のような等価回路とみなす．

以下，ロータの芯は半径 r，長さ l の円柱形状であり，水平方向に一様な磁束密度 B の磁場がロータの回転軸に対して垂直に貫くよう配置されている．なお，磁場はロータの影響を受けて変化しないとする．また，導線の半径は芯の半径に比べて十分に小さいとする．ロータの角速度を ω，時間を t，ロータの慣性モーメントを J，ローレンツ力によるトルクを T，等価回路の入力電圧を E，電流を i，抵抗を R，インダクタンスを L，逆起電力を e とする．

(1) 図 1-3 の位置の n 回巻きの巻き線に電流 i が流れることで発生する，ローレンツ力によりロータに生じるトルク T の大きさを求めよ（一般に，電流 j が流れる導線を垂直に貫く磁束密度 b の一様な磁場により，長さ Y の導線に生じるローレンツ力の大きさは bYj となる）．

(2) ロータが角速度 ω で回転しているとき，n 回巻きの巻き線が図 1-3 の位置に来た際の誘導起電力により等価回路に生じる逆起電力 e の大きさを求めよ（一般に，長さ Y の導線が，導線を垂直に貫く磁束密度 b の一様な磁場を，速さ v で横切る際に生じる誘導起電力の大きさは bYv となる）．

(3) ロータの回転方向と逆向きの負荷トルク T_L が作用するとき，ローレンツ力によるトルクを $T = K_T i$ として，ロータの回転の運動方程式を i，J，K_T，t，T_L，ω を用いて表せ．ただし，図 1-3 において反時計回りのロータの回転を正とする．

(4) 逆起電力を $e = K_E\omega$ として，図 1-4 の等価回路の入力電圧 E を i，K_E，L，R，t，ω を用いて表せ（インダクタンスによる電圧降下は等価回路を流れる電流 i の時間 t による微分 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ に比例する）．

(5) 問 (3), (4)において，入力電圧 E が一定($E = E_0$)で電流および角速度に関して定常状態を考える．負荷トルクを出力トルクとみなして，出力トルクの最大値，角速度の最大値，最大動力を求め，それぞれを E_0，K_T，K_E，R のいずれかを用いて表せ．

(次ページにつづく)

問題２の続き

つぎに，負荷トルクT_Lをゼロとした場合の入力電圧に対するロータの角速度の時間応答について考える．以下では，入力電圧，電流，角速度は時間関数として，ラプラス変換が可能とする．また，$K_T = K_E = K$とおく．なお，$t<0$で$x(t)=0$となるような時間関数$x(t)$に対して，

$$X(s)=\int_0^{\infty} x(t)\exp(-st)\mathrm{d}t$$

が存在するとき，これを関数$x(t)$のラプラス変換といい，$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$と表現する．ここでsは複素数である．

(6) ラプラス変換された入力電圧$u(s)=\mathcal{L}[E(t)]$に対する角速度$q(s)=\mathcal{L}[\omega(t)]$の伝達関数は

$$G(s)=\frac{q(s)}{u(s)}=\frac{1/K}{\tau_1\tau_2 s^2+\tau_1 s+1}$$

で与えられる．ここで，角速度，電流の初期値はゼロとする．このとき，τ_1，τ_2それぞれをJ，K，L，Rのいずれかを用いて表せ．

(7) τ_1がτ_2に比べて十分に大きく$\tau_2=0$としてみなせる場合を考える．入力電圧に対するロータの角速度の時間応答をはやくするためには，芯の長さlをどのようにするとよいか，理由を含めて答えよ．

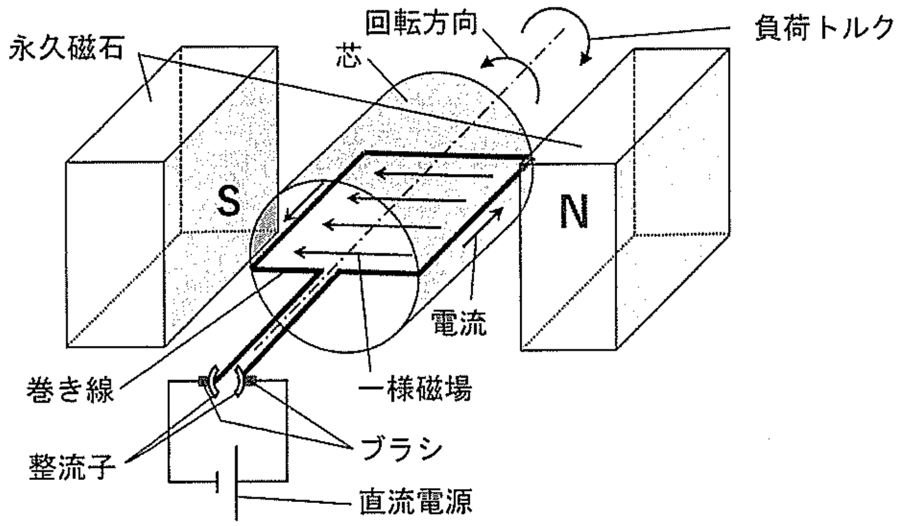

図 1-2

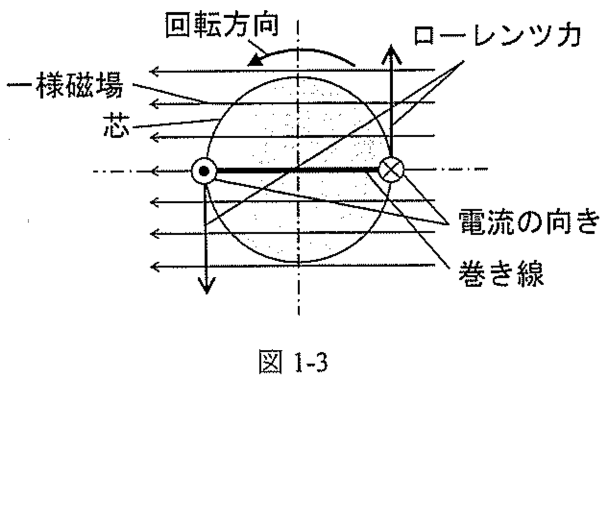

図 1-3

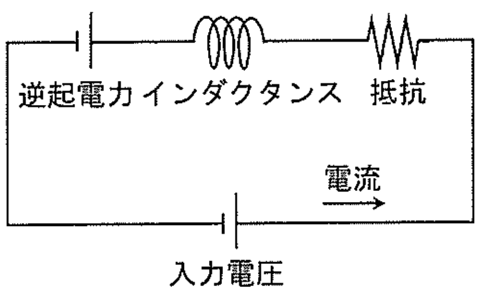

図 1-4

問題３（次の（１）（２）の両方を解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ.）

（１）図 1-5 に示すような，拡大部を伴う管の中の，密度がρの非圧縮性流体の定常流れを考える．拡大部の上流側の管の断面積をA_1，流速をu_1，圧力をp_1，拡大部の下流側の管の断面積をA_2（$>A_1$），一様化した後の流速をu_2，圧力をp_2とする．拡大部付近を除いて，流れは管に垂直な断面内で一様と仮定する．周囲の流体の圧力をp_0（一定）とし，また管壁のせん断応力を無視する．以下の問に答えよ．

(a) u_2をu_1，A_1，A_2を用いて表せ．

(b) 図 1-5 に示すように，管の拡大部の角に渦が生じ，この周辺の管壁近傍の圧力がp_1になると仮定する．図 1-5 中に破線で示す検査面に対して運動量保存の法則を適用して得られる式を示せ．

(c) 拡大部で生じる，単位質量当たりの流体のエネルギ損失を，A_1，A_2，u_1を用いて表せ．

(d) エネルギ損失が生じる流体力学的な仕組みを簡潔に説明せよ．

(e) 拡大部の下流側の管が流体から受ける流れ方向の力を，A_1，A_2，p_0，p_1を用いて表せ．

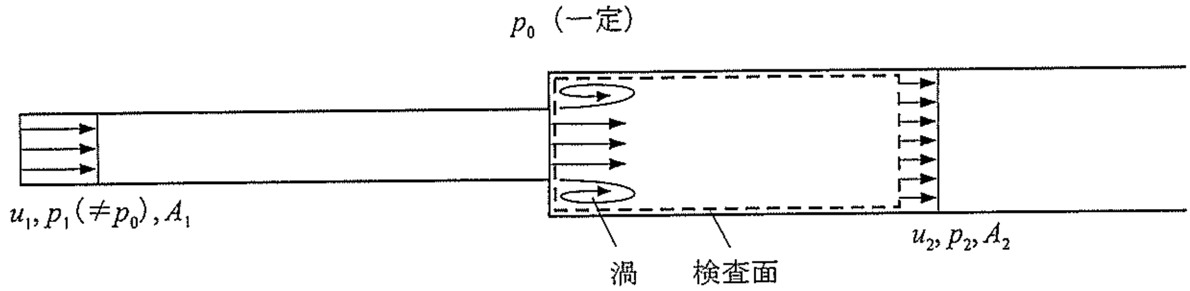

図 1-5

（次ページにつづく）

問題３の続き

（２） 図 1-6 に示すように，断面積が A，長さが L の管が，体積が V の容器に接続されている系を考える．管と容器の内部とそれらの周囲は気体で満たされていて，管の入口部近傍で気体にじょう乱を与えると，管と容器の中の気体が一定の角周波数ωで微小振動した．管の長さ L は，音の波長 $2\pi a/\omega$ （a は音速）に比べて十分小さく，長さが L の管内では，気体は管軸方向にのみ流動し，その流速 u は空間的に一様であったと仮定する．簡単化のために，長さが L の管内では，気体の密度を一定と仮定し，その値を $\bar{\rho}$ とする．また，容器の体積 V は，管の体積 AL に比べて十分大きく，容器内の気体の密度ρと圧力 p は空間的に一様に変化したと仮定する．さらに，気体の粘性を無視し，また周囲の気体の圧力が p_0 で一定と仮定する．時刻を t として以下の問に答えよ．

(a) 管から容器内に流入（または，容器内から管へ流出）する質量流量が，容器内の気体の質量の時間変化率に等しいという条件から導かれる連続の式を，A，t，u，V，ρ，$\bar{\rho}$ を用いて表せ．

(b) 長さ L の管内の気体の運動方程式を示せ．

(c) 容器内の気体の密度ρと圧力 p には，音速 a の定義から，次の関係がある．

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

このとき，管内の気体の速度 u に関して成り立つ微分方程式を示せ．

(d) 角周波数ωを，a，A，L，V を用いて表せ．

(e) 問(d)で得られた角周波数ωの力学的な意味を述べよ．

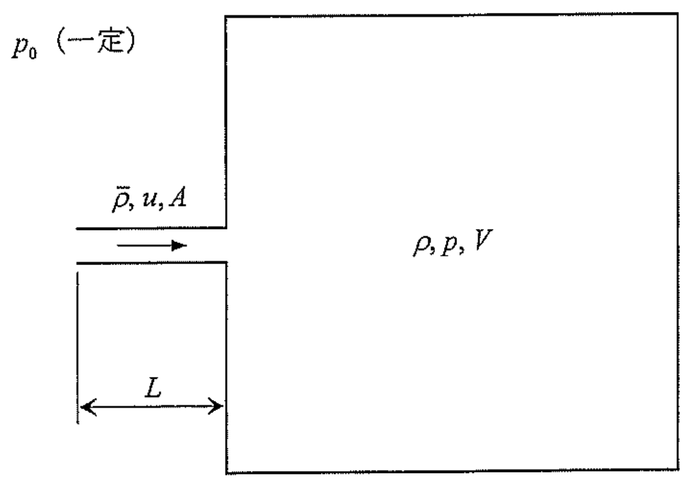

図 1-6