機械科学 II

(問題１から問題３のすべてに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１(２枚目)」などのように記入せよ.)

問題１

一辺の長さ a の正方形断面をもつ，同じ材料でできた長さが l の２本の弾性棒 AB と BC を，点 B において互いに直角に溶接した部材 ABC がある．図 2-1 のように，この部材 ABC を摩擦のない水平な剛体床に立て，点 B に鉛直方向の荷重 P を加える．自重を無視して，以下の問に答えよ．ただし，角部 B はつねに直角に保たれ，部材にせん断変形と座屈変形は生じないとする．ヤング率は E とする．

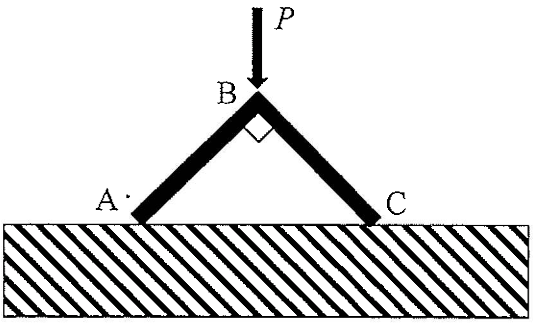

図 2-1

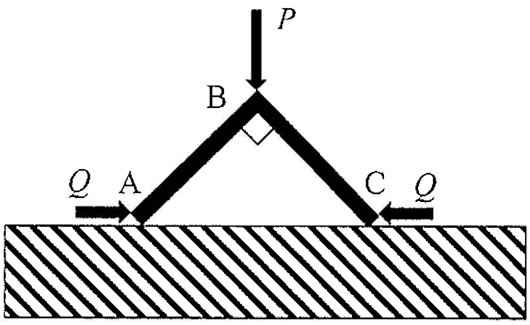

図 2-2

（１）AB 間（および BC 間）に生じる軸力と最大曲げモーメントの大きさを求めよ．
（２）部材 ABC に生じる，絶対値が最大の垂直応力を求めよ．
（３）点 B の鉛直方向の変位を求めよ．

つぎに，荷重 P を受けている部材 ABC に対して，図 2-2 のように点 A と点 C に同じ大きさの相対する水平方向の荷重 Q を加えていく．

（４）荷重 P のために AB 間（および BC 間）に生じていた曲げ変形がなくなるときの Q の大きさを求めよ．
（５）問（４）のとき，無負荷状態からの点 B の鉛直方向の変位を P を用いて表せ．
（６）問（４）で求めた荷重 Q からさらに ΔQ だけ増加させると，点 B の高さを無負荷のときの高さにもどすことができる．このときの $\Delta Q/Q$ を求めよ．

問題２

図２-３に示すようなディフューザ，あるいはノズルに，非一様な流れが流入する場合を考える．紙面垂直方向の流れは生じず，流れはx，y面内の２次元定常流れと仮定する．また，逆流は生じないものと仮定する．流体は，密度がρの非粘性，非圧縮性流体である．ディフューザ，もしくはノズルの上流側（$x=x_1$），および下流側（$x=x_2$）の流路の幅をそれぞれ，W_1，および$W_2=a\cdot W_1$（aは定数）とする．x軸方向の流速を$u(x,y)$，位置$x=x_1$，x_2では，流れが管壁に平行に流れると仮定し，y軸方向の流速$v(x,y)$を０とする．また，$x=x_1$，x_2における流体の圧力をそれぞれ，$p(x_1)$，$p(x_2)$とする．$x=x_1$のx軸方向流速$u(x_1,y)$を$\overline{u}(x_1)(1+b\cdot y/W_1)$と仮定する．ここで，$\overline{u}(x_1)$は，$x=x_1$における紙面に垂直な流路断面の面積平均流速（一定），bは正の定数である．また，重力の影響を無視して考える．以下の問に答えよ．

(1) $x=x_1$における渦度（$=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$）を求めよ．

(2) $x=x_2$における紙面に垂直な流路断面の面積平均流速を，$\overline{u}(x_1)$, aを用いて表せ．

(3) $x=x_1$と$x=x_2$における渦度が等しいという関係から，$x=x_2$における流速$u(x_2,y)$を求め，これを$\overline{u}(x_1)$，a，b，W_2，yを用いて表せ．

(4) $b=\dfrac{2}{3}$の場合の$x=x_1$の流速分布を，横軸を$u(x_1,y)/\overline{u}(x_1)$，縦軸を$y/W_1$として描け．

(5) $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{2}{3}$の場合の$x=x_2$の流速分布を，横軸を$u(x_2,y)/\overline{u}(x_1)$，縦軸を$y/W_1$として描け．

(6) 問(4)，(5)の結果から，ディフューザでは，下流側の流速の面積平均値と面積平均値からの偏差成分が，上流側のものと比べて，それぞれどのように変化するのか述べよ．また，$(x,y)=(x_1,0)$を通る流線が，$x=x_2$では，$y>0$，$y=0$，$y<0$のいずれの領域（点）を通るのかを，その根拠とともに答えよ．

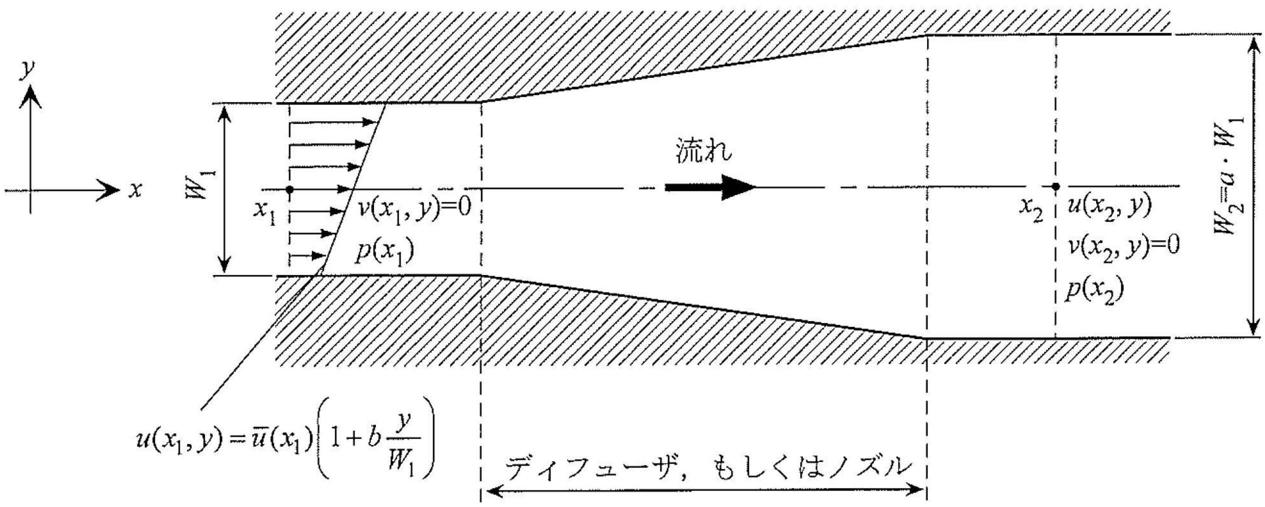

図２-３

問題２の続き

(7)　$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$ の場合の $x=x_2$ の流速分布を，横軸を $u(x_2,y)/\overline{u}(x_1)$，縦軸を y/W_1 として描け．また，本結果と問(4)の結果から，ノズルでは，下流側の流速の面積平均値と面積平均値からの偏差成分が，上流側のものと比べて，それぞれどのように変化するのか述べよ．さらに，$(x,y)=(x_1,0)$ を通る流線が，$x=x_2$ では，$y>0$，$y=0$，$y<0$ のいずれの領域（点）を通るのかを，その根拠とともに答えよ．

次に，圧力について考える．

(8)　壁面に沿う一流線上の流れに対してベルヌーイの式を適用し，$\dfrac{p(x_2)-p(x_1)}{\frac{\rho}{2}\overline{u}(x_1)^2}$ を a，b を用いて表せ．

(9)　$x=x_1$ の全圧 $p_t(x_1,y)$ を，$p(x_1)$ と $u(x_1,y)$ を用いて表せ．

(10)　問(9)で求めた全圧 $p_t(x_1,y)$ を面積平均して，面積平均全圧 $\overline{p}_t(x_1)\left(=\dfrac{1}{W_1}\displaystyle\int_{-W_1/2}^{W_1/2}p_t(x_1,y)\mathrm{d}y\right)$ を求め，$\dfrac{\overline{p}_t(x_1)-p(x_1)}{\frac{\rho}{2}\overline{u}(x_1)^2}$ を a，b を用いて表せ．

(11)　$x=x_2$ の全圧 $p_t(x_2,y)$ を，$p(x_2)$ と $u(x_2,y)$ を用いて表せ．

(12)　問(11)で求めた全圧 $p_t(x_2,y)$ を面積平均して，面積平均全圧 $\overline{p}_t(x_2)\left(=\dfrac{1}{W_2}\displaystyle\int_{-W_2/2}^{W_2/2}p_t(x_2,y)\mathrm{d}y\right)$ を求め，$\dfrac{\overline{p}_t(x_2)-p(x_2)}{\frac{\rho}{2}\overline{u}(x_1)^2}$ を a，b を用いて表せ．

(13)　問(8)と(12)の結果から，$\dfrac{\overline{p}_t(x_2)-p(x_1)}{\frac{\rho}{2}\overline{u}(x_1)^2}$ を a，b を用いて表せ．

(14)　問(10)と(13)の結果から $\dfrac{\overline{p}_t(x_2)-\overline{p}_t(x_1)}{\frac{\rho}{2}\overline{u}(x_1)^2}$ を求め，この面積平均全圧差が生じる原因を，流速分布に関連付けて説明せよ．また，$a>1$ と $a<1$ のそれぞれの場合の全圧差の正負を述べよ．

(15)　非粘性流体の場合には圧力損失が生じないにもかかわらず，面積平均した場合には，問(14)で求めたように，全圧差が０でなくなり，エネルギー保存則が満足されないように見える．全圧差が０となるような全圧の平均化法を答えよ．

問題３

実対称行列 $K=\begin{pmatrix} 1+a & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-a \end{pmatrix}$ において，$|a|<1$ とする．以下の全ての問に答えよ．

（１）$\varepsilon>0$ のとき K の固有値 $\omega^{(1)}$ と $\omega^{(2)}$ を求めよ．さらに，それぞれに対応する固有ベクトルを $\mathbf{q}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ q_2^{(1)} \end{pmatrix}$ と $\mathbf{q}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 \\ q_2^{(2)} \end{pmatrix}$ の形で表し（$q_2^{(1)}$ と $q_2^{(2)}$ を求め），$q_2^{(1)}$ と $q_2^{(2)}$ の符号を示せ．ただし，$\omega^{(1)}>\omega^{(2)}$ とする．

（２）$\varepsilon=0$ のとき，a に対する $\omega^{(1)}$ と $\omega^{(2)}$ の変化を，横軸 $-1<a<1$ の範囲において一点鎖線で描け．次に，$0<\varepsilon<<1$ のとき，同じ図中に $\omega^{(1)}$ と $\omega^{(2)}$ の変化の概略図を，$1>\left|q_2^{(i)}\right|$ のときは実線で，$1\leq\left|q_2^{(i)}\right|$ のときは破線で描け（i=1, 2）．

これ以降，a=0 および $\varepsilon>0$ とする．実ベクトル $\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を用いて定義されるスカラー $E=\dfrac{1}{2}\left({}^t\mathbf{u}K\mathbf{u}\right)$ を考える．ここで，${}^t\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}$ の転置を表す．

（３）正の実数 α に対して，$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを示せ．

（４）問（３）の関係式を利用して，

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-E}\,du_1\,du_2=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^{(1)}\omega^{(2)}}}$$

となることを示せ．

（５）$A_{ij}=\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_i u_j\,\mathrm{e}^{-E}\,du_1\,du_2}{I_0}$（$i,j$=1, 2）を成分とする行列を A とすると，行列 A と行列 K の積（AK）が単位行列となることを示せ．（ヒント：例えば $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ は，部分積分を１回実行してから問（３）の関係式を用いることにより計算される）