

## 機械科学 I

（問題1から問題3の全てに解答し、それぞれ別の答案用紙に記入せよ。各問題に2枚以上の答案用紙を用いる場合には、「問題1（2枚目）」などのように記入せよ。）

### 問題 1

図1-1のような2軸のジンバルからなるジャイロスコープの運動を考えよう。ジンバル1, 2の回転軸  $AA'$ ,  $BB'$  及び円板ローターの回転軸  $CC'$  はローターの中心で互いに交差し、回転軸  $AA'$ ,  $CC'$  は円板の対称軸と一致している。また、回転軸  $AA'$ ,  $BB'$  はそれぞれ水平、鉛直方向を向き、ローターはその中心を空間に固定されたまま各軸まわりに自由に姿勢を変化させることができる。なお、ローターの回転軸及びジンバルの質量は無視できるものとする。

以下、回転軸  $CC'$  を水平とするローターが静止した状態を初期姿勢とし、初期姿勢からのローターの姿勢変化を回転軸  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  まわりの角度の変化量  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  を用いて表すことにする。ただし、 $q_1$  は微小とする。また、初期姿勢における回転軸  $AA'$  及び  $BB'$  に関するローターの慣性モーメントを  $I_{12}$  ( $=I_{AA'}=I_{BB'}$ )、回転軸  $CC'$  に関するローターの慣性モーメントを  $I_3$  ( $=I_{CC'}$ ) とし、 $I_3 > I_{12}$  を満たすものとする。

ローターを回転軸  $CC'$  まわりに高速回転させるとき、次の問に答えよ。

- (1) ローターの運動エネルギー  $T$  が

$$T = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_3 - q_1 \dot{q}_2)^2$$

と表されることを示せ。

- (2) 回転軸  $AA'$  まわりにトルク  $\tau_1$ , 回転軸  $BB'$  まわりにトルク  $\tau_2$  を与えるとき、回転軸  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  まわりのローターの運動方程式をそれぞれ求めよ。

- (3) 問(2)において、回転軸  $CC'$  まわりの角運動量は保存されている。回転軸  $CC'$  まわりに一定となる角速度を  $\omega_3$  と置くことで、問(2)の回転軸  $AA'$ ,  $BB'$  まわりのローターの運動方程式を書き換えよ。

問題1の続き

以下、上記の設定の下で、回転軸 AA', BB' まわりに角速度に比例した粘性減衰係数  $b (\ll I_3 \omega_3)$  の小さな抵抗が働くものとする。

- (4) ローターを初期姿勢から回転軸 CC' まわりに高速回転させた後、回転軸 BB' まわりに  $\omega_2 (\ll \omega_3)$  の角速度を与え、自由運動させた。回転軸 AA', BB' まわりのローターの運動を調べよ。
- (5) 上記運動の概形を  $q_1, q_2$  を座標軸とする平面上に図示し、角運動量とローターの姿勢の関係について物理的観点から論ぜよ。

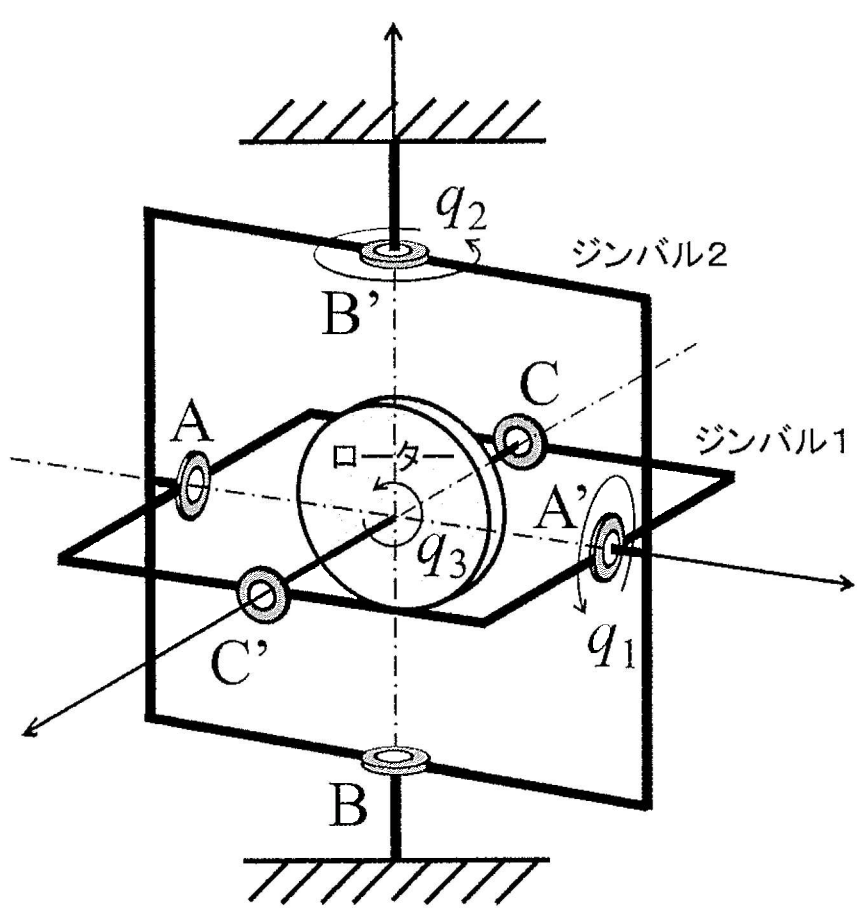


図 1 - 1

## 問題2 (次の(1)(2)の両方を解答し、それぞれ別の解答用紙に記入せよ.)

(1) 半径  $a$ , 熱伝導率  $k$ , 熱拡散率  $\alpha$  の一様な材質でできた球状の物体  $S$  を, 無限遠での温度が  $T_\infty$  に保たれた流体中におく. 時刻  $t = 0$  における物体  $S$  の温度は一様であり, これを  $T_0 (> T_\infty)$  とする. ただし, 熱伝達率は一定であるとし, これを  $h$  で表す. この場合, 時刻  $t$  における, 物体  $S$  の中心からの距離  $r$  の位置での物体  $S$  の温度は  $T(r, t)$  と表される. 以下の問に答えよ.

(a)  $T(r, t)$  の時間発展を支配する方程式を書け. ただし, 一般に, 球座標系  $(r, \theta, \phi)$  でのラプラスアンは,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

と表される.

(b)  $r = a$  において  $T(r, t)$  が満たすべき条件を導け.

無次元距離を  $r^* = r/a$ , 無次元時刻を  $t^* = t/(a^2/\alpha)$ , 無次元温度を  $T^* = (T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$  と定義する. また,  $B = ah/k$  と表すとき, 以下の問に答えよ.

(c) (a), (b) で求めた式, および, 物体  $S$  の温度の初期条件を無次元化すると, これらは  $B$  のみに依ることを示せ.

(d)  $B \gg 1$  のとき, 物体  $S$  および, 物体  $S$  と同じ材質で半径が  $2a$  の球状の物体  $S'$  をそれぞれ同じ流体の中におく. 初期温度が同じであるとき, 物体  $S$  と物体  $S'$  のどちらが何倍はやく冷却されるかを示せ.

(e)  $B \ll 1$  のとき, 物体  $S$  の中心の無次元温度  $T_c^*(t^*)$  を支配する方程式を導き, それを解いて  $T_c^*(t^*)$  を求めよ. また, 初期温度が同じであるとき, 物体  $S$  と (d) に示した物体  $S'$  のどちらが何倍はやく冷却されるかを示せ.

(f)  $B \ll 1$  のとき, 物体  $S$  と同じ材質, 同じ体積の立方体 (物体  $C$ ) をそれぞれ同じ流体の中におく. 初期温度が同じであるとき, 物体  $S$  と物体  $C$  のどちらが何倍はやく冷却されるかを示せ.

## 問題 2 の続き

- (2) 周囲から断熱されたシリンダにおいて気体定数  $R$ 、比熱比  $\gamma$ （定圧比熱を定積比熱で除した無次元量）の理想気体を下図に示す方法 A あるいは B により膨張させる。比熱比  $\gamma$  は気体の温度に依らず一定である。シリンダのふたは断熱されており、シリンダの内壁に沿って滑らかに上下することができる。シリンダおよびふたは剛体と見なしてよく、ふたの質量は無視できるものとする。シリンダとふたの外側は真空中に保たれている。いずれの方法により膨張させる場合も、膨張前の気体の圧力は  $p_0$ 、絶対温度は  $T_0$  であり、膨張後の気体の圧力は  $p_1$  ( $< p_0$ ) である。気体の膨張に関する以下の問に答えよ。

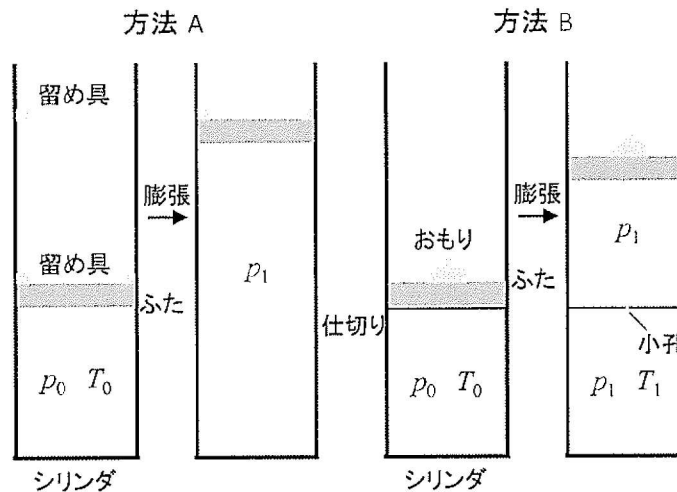


図 1-2

方法 A では、膨張前にふたを留め具で固定し、シリンダ内に気体を入れる。留め具を外すと、ふたがシリンダ上方の留め具に達するまで気体は膨張する。

- (a) 膨張後の気体の絶対温度を求めよ。  
 (b) 膨張前に対する膨張後の気体の単位質量あたりのエントロピの増加量  $\Delta s_A$  を求めよ。また、この膨張過程は可逆か不可逆かを判定せよ。

方法 B では、上図に示すように、周囲から断熱された仕切りをシリンダに取り付け、シリンダ内に気体を入れ、仕切りの上にふたを載せる。このとき、シリンダ内の気体の質量は  $m_0$  である。ふたにはおもりが固定されており、図において下向きに重力が作用している。気体を膨張させる際には、仕切りに小孔を空ける。すると気体は小孔から仕切りとふたとの隙間に侵入し、気体とおもりがそれぞれふたに及ぼす力が釣り合いを保ちながら、ゆっくりとふたは鉛直上方に移動する。この際に仕切りは変形せず、仕切りの下側および上側の気体はそれぞれ異なる温度で熱平衡を維持していると見なしてよいものとする。ふたは、仕切りの下側の気体の圧力が仕切りの上側の気体の圧力に等しくなると静止した。この圧力は  $p_1$  であり、ふたが静止した際の、仕切りの下側の気体の絶対温度は  $T_1$  ( $< T_0$ ) である。

- (c) 膨張後の、仕切りの上側の気体の質量と絶対温度を求めよ。  
 (d) 膨張過程で気体が外になした仕事を求めよ。  
 (e) 気体の比熱比が  $\gamma = 4/3$ 、温度比が  $T_1/T_0 = 6/7$ 、圧力比が  $p_1/p_0 = 3/7$  であるとする。このときの膨張前に対する膨張後の気体の単位質量あたりのエントロピの増加量  $\Delta s_B$  を、同一の  $p_1/p_0$  の値に対する方法 A による気体の膨張に伴うエントロピの増加量  $\Delta s_A$  と比較し、 $\Delta s_A$  と  $\Delta s_B$  の大小関係を示せ。この場合の方法 B による膨張過程は可逆か不可逆かを判定せよ。

### 問題 3

図1-3のように、内径  $2a$ 、長さ  $\lambda a$ （ただし、 $\lambda \geq 1$ ）の円筒の両端に、内半径  $a$  の半球殻が接合された圧力容器を考える。円筒と半球殻の肉厚  $t$  は  $a$  と比べて十分小さく ( $t \ll a$ )、薄肉の仮定が成り立つとする。容器に内圧  $P$  が作用しているとき、以下の問に答えよ。なお、容器の外圧は無視でき、円筒部と半球殻部との間の接合は十分に強固であるとする。

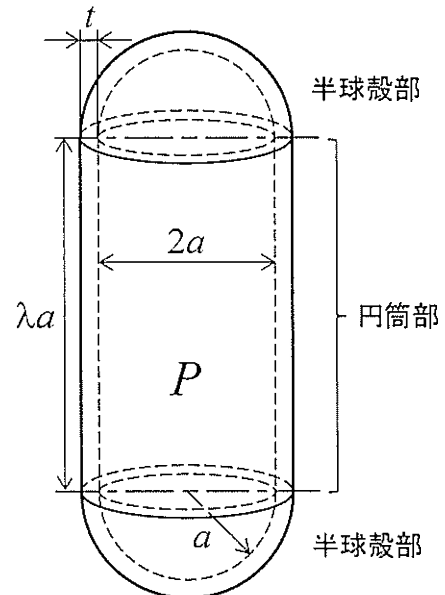


図 1-3

- (1) 容器の質量  $M$  を求めよ。ただし、容器材の密度を  $\rho$  とする。
- (2) 円筒部に生じる円筒の軸方向の応力 ( $\sigma_z$ ) を  $P, a, t$  を用いて表せ。
- (3) 円筒部に生じる円周方向の応力 ( $\sigma_\theta$ ) を  $P, a, t$  を用いて表せ。
- (4) 半球殻部に生じる円周方向の応力 ( $\sigma_r$ ) を  $P, a, t$  を用いて表せ。
- (5) 円筒部および半球殻部の半径方向に生じる応力 ( $\sigma_r$ ) は、 $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r$  と比べて無視できると考えてよい。その理由を述べよ。
- (6) 容器材の許容応力  $\sigma_a$  が、単軸引張の降伏応力  $\sigma_Y$  と安全率  $f$  から  $\sigma_a = \sigma_Y / f$  と与えられるとする。容器材は最大主応力説に従って破損すると仮定するとき、最小肉厚  $t$  を  $P, a, \sigma_Y, f$  を用いて表せ。

以降では、問(6)の仮定が成り立つものとして解答せよ。

- (7) 質量  $m$ 、気体定数  $R$  の理想気体が容器内に圧力  $P$ 、絶対温度  $T$  で封入されているとき、気体と容器の質量比  $m/M$  を  $\rho, \sigma_Y$  等を用いて表せ。ここで、容器内部と外部との間の熱移動は無視でき、気体は容器内に密閉されているものとする。
- (8) 問(7)の結果に基づいて、 $m/M$  を増加させるための方法を述べよ。
- (9) 水素ガス 1 kg を本容器に封入することを考える。容器材として高張力鋼 ( $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3, \sigma_Y = 840 \text{ MPa}$ ) と炭素繊維強化プラスチック ( $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3, \sigma_Y = 420 \text{ MPa}$ ) を選択するとき、 $t/a$  および  $m/M$  を求め、両材料間でそれぞれの大きさを比較せよ。ただし、水素ガスは理想気体と見なせるものとし、容器の内容積は  $0.126 \text{ m}^3, R = 4.2 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}, T = 300 \text{ K}, \lambda = 4, f = 2$  とする。