

機械科学 I

（問題1から問題3の全てに解答し、それぞれ別の答案用紙に記入せよ。各問題に2枚以上の答案用紙を用いる場合には、「問題1（2枚目）」などのように記入せよ。）

問題1

断熱材でできた断面積が A のシリンダーの中に、熱伝導率が k 、断面積が A 、厚みが l のなめらかに動くピストンをおき、理想気体を封入する（以下、この気体を気体 G とよぶ）。外部の絶対温度を T_1 、圧力を p_1 とする。気体 G の温度と圧力が、外部の温度と圧力とそれぞれ一致した平衡状態を「状態1」とよぶ。このときの気体 G の体積を V_1 とする。

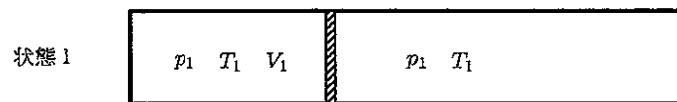


図1-1

次に、単位時間あたりの発熱量が Q の熱源をシリンダー内に挿入する。気体 G はゆっくりと膨張するが、十分時間が経過したのち、ピストンは静止した。この状態を「状態2」とよぶ。ただし、気体 G 中の熱伝達は、ピストンの中の熱伝導に比べて十分に速く、気体 G の温度は常に一様であるとする。



図1-2

次に、ピストンを大きさが無視できる固定具で固定したのちに、熱源を除去した。十分時間が経過したのちの状態を「状態3」とよぶ。



図1-3

次に、ピストンの固定を解いて、十分に時間が経過すると気体 G は状態1に戻った。このとき、以下の問に答えよ。

問題1の続き

- (1) 気体 G が状態2に達したときのピストン内部の絶対温度の分布 $T(x)$ を求めよ。ただし、図1-4のようにピストンの左端を原点とした x 軸を定める。

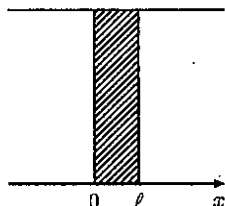


図1-4

- (2) 状態2における気体 G の絶対温度および体積を求めよ。(この温度を T_2 とし、必要であれば以下の問の解答に用いてよい。)
- (3) 状態1から状態2への過程で、気体 G が吸収する正味の熱量は、この間の気体 G のエンタルピーの増分に等しいことを示せ。
- (4) 状態2から状態3への過程の途中で、ピストン内部の温度分布として最も適切なものを、図1-5(a), (b), (c) の中から理由をつけて選べ。

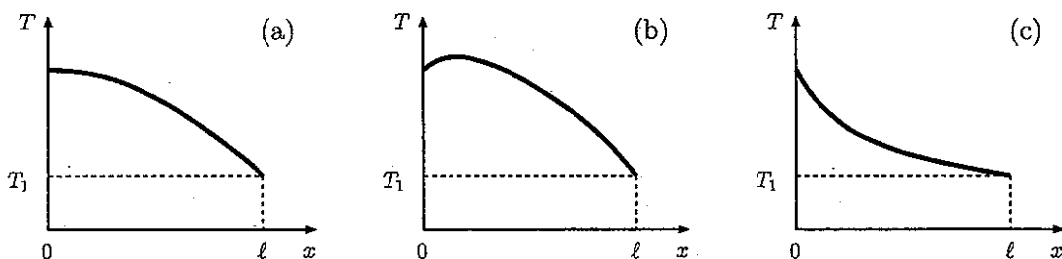


図1-5

- (5) 状態2および状態3における気体 G のエントロピーの差を求め、状態2から状態3への過程が不可逆過程であることを示せ。ただし、気体 G の質量を m 、定積比熱を c_v (一定) とする。また、ピストンの熱容量は十分に小さく、ピストンのもつ内部エネルギーおよびエントロピーは、それぞれ、気体 G のもつ内部エネルギーおよびエントロピーと比べて無視可能であるとしてよい。
- (6) 状態3における気体 G の圧力を求めよ。
- (7) 状態3から状態1へ準静的に変化させた場合、気体 G がピストンからされる仕事を求めよ。
- (8) 状態3から状態1へ不可逆的に変化した場合、気体 G がピストンからされる仕事は (7) の場合よりも大きくなることを示せ。

問題2

圧力勾配によって駆動される平行平板間の流れを考える(図1-6). 流体は密度 ρ , 粘度 μ の非圧縮性ニュートン流体である. 紙面 x, y 面内の流れを考え, 速度の x, y 方向成分を, それぞれ, u, v , 圧力を p と記す. 紙面垂直方向の運動はないものとする. 静止した無限平板が $y=-h$, および, $y=h$ に位置する. 平板間距離 $2h$ がマイクロスケール程度に小さい場合, 平板上での速度がゼロとはならず, 速度滑りが現れることが知られている(図1-7). 平板上での境界条件は, 滑り長さ $\lambda(<h)$ を用いて次式で与えられるものとする.

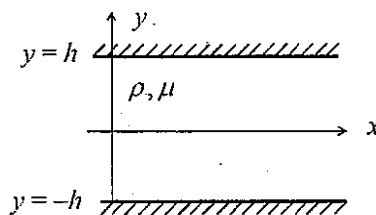


図1-6 系について

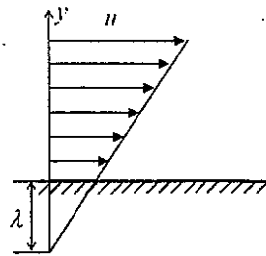


図1-7 平板付近の速度分布(拡大図)

$$\begin{cases} u = \lambda \frac{\partial u}{\partial y}, v = 0 & \text{at } y = -h, \\ u = -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}, v = 0 & \text{at } y = h. \end{cases} \quad (1)$$

流れは層流とし, 以下の質量保存式, 運動量保存式に従う.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

ここで, t は時刻である. 速度滑りの影響に関して, 以下, 各種物理量と滑り長さ λ の関係を見ていく.

まず, 定常流れを考える. 系には, 一定の圧力勾配 $(-\partial p / \partial x) = A$ が作用する. 以下の問に答えよ.

(1) 速度成分 u, v は座標 x に依存しないものとする. 式(1)~(3)から, 以下の関係式を導出せよ.

$$v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$0 = A + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (5)$$

(2) 式(1), (5)より, 速度成分 u を座標 y の関数として求めよ.

(3) 下の平板($y=-h$)に作用する壁面せん断応力 τ_w , 紙面垂直方向(z 方向)単位厚みあたりの流量 Q を考える. 下記の文章中の(a), (b), (c)に適切な数式を入れよ.

速度滑りを無視した場合($\lambda=0$)の速度 u_0 に対して, 壁面せん断応力 τ_{w0} , 流量 Q_0 は,

$$\tau_{w0} = \mu \left. \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|_{y=-h} = \boxed{\text{(a)}}, \quad Q_0 = \int_{-h}^h u_0 dy = \boxed{\text{(b)}}. \quad (6)$$

滑り長さが λ の場合, τ_w, Q は,

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=-h} = \tau_{w0}, \quad Q = \int_{-h}^h u dy = Q_0 \times \boxed{\text{(c)}}. \quad (7)$$

式(6), (7)より, 速度滑りの影響は, 壁面せん断応力に反映されない. 流量には反映され, 速度滑りを無視した場合に対して $\boxed{\text{(c)}}$ 倍となる.

問題2の続き

次に、時間周期的な非定常流れを考える。系に作用する圧力勾配を以下のように与える。

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right) = B \cos \omega t = \operatorname{Re}(B \exp(i\omega t)), \quad (8)$$

ここで、 B は振幅、 ω は角振動数、 $\operatorname{Re}(\phi)$ は複素数 ϕ の実部、 i は虚数単位である。以下の問に答えよ。

- (4) 下記の文章は、変数分離法により、速度成分 u と壁面せん断応力 τ_w を求める手順の説明である。文章中の(d), (e), (f)に適切な数式を入れよ。

速度成分を $u = \operatorname{Re}(\hat{u}(y) \exp(i\omega t))$ とおく。式(1),(2),(3),(8)より、 \hat{u} に対する支配方程式、境界条件は、

$$\zeta^2 \hat{u} = \frac{B}{\mu} + \frac{d^2 \hat{u}}{dy^2}, \quad (9)$$

$$\hat{u} = \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \quad \text{at } y = -h; \quad \hat{u} = -\lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \quad \text{at } y = h, \quad (10)$$

ここで、 $\zeta = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\mu}}(1+i)$ 。微分方程式(式(9))の解は、

$$\hat{u} = \frac{B}{\mu\zeta^2} + C_1 \cosh \zeta y + C_2 \sinh \zeta y, \quad (11)$$

ここで、 $\cosh \phi = \frac{\exp(\phi) + \exp(-\phi)}{2}$ 、 $\sinh \phi = \frac{\exp(\phi) - \exp(-\phi)}{2}$ 。式(10)より、式(11)中の C_1, C_2 は、 $\mu, \lambda, \zeta, B, h$ の関数として以下のように求まる。

$$C_1 = \boxed{\text{(d)}}, \quad C_2 = \boxed{\text{(e)}}. \quad (12)$$

下の平板($y = -h$)に作用する壁面せん断応力を $\tau_w = \operatorname{Re}(\hat{\tau}_w \exp(i\omega t))$ とおく。式(11),(12)より、 $\hat{\tau}_w$ は以下のように求まる。

$$\hat{\tau}_w = \mu \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right|_{y=-h} = \boxed{\text{(f)}}. \quad (13)$$

- (5) 角振動数 ω が十分に低い場合 ($|\zeta h| \ll 1$; ここで、 $|\phi| = \sqrt{\{\operatorname{Re}(\phi)\}^2 + \{\operatorname{Im}(\phi)\}^2}$ 、 $\operatorname{Im}(\phi)$ は複素数 ϕ の虚部) を考える。 $|\zeta h| \rightarrow 0$ の極限において、式(13)の $\hat{\tau}_w$ は滑り長さ λ に依存しなくなることを示せ。なお、以下の関係を用いよ。

$$\cosh \phi \rightarrow 1, \quad \sinh \phi \rightarrow \phi \quad \text{as } |\phi| \rightarrow 0; \quad 0 < \frac{\lambda}{h} < 1.$$

- (6) 角振動数 ω が十分に高い場合 ($|\zeta h| \gg 1$)、壁面せん断応力に対する角振動数 ω と滑り長さ λ の影響を考える。 μ, ρ, B, h の値は定められているものとする。以下の関係を考慮し、

$$\cosh \phi \rightarrow \frac{\exp(\phi)}{2}, \quad \sinh \phi \rightarrow \frac{\exp(\phi)}{2} \quad \text{as } \operatorname{Re}(\phi) \rightarrow \infty,$$

下記の文章中の(g), (h), (i)に適切な数を入れよ。

- ・速度滑りが無い場合 ($\lambda = 0$)、 $|\hat{\tau}_w|$ は角振動数 ω の $\boxed{\text{(g)}}$ 乗に比例する。
- ・ $|\lambda\zeta| \gg 1$ の関係を満たす程度に角振動数 ω が高い場合、 $|\hat{\tau}_w|$ は角振動数 ω の $\boxed{\text{(h)}}$ 乗、滑り長さ λ の $\boxed{\text{(i)}}$ 乗に比例する。この角振動数依存性は、速度滑りの無い場合とは異なることから、壁面せん断応力においては、高角振動数の条件で、滑り長さ λ の影響が顕在化することがわかる。

問題 3 (小問 (1), (2) の両問に答えよ)

(1) 実定数 a, b を係数とする関数 $y(x)$ の x に関する微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{1}$$

について以下の問に答えよ。ただし、 $x > 0$ とする。

- (a) 変数変換 $x = e^t$ を用いて、(1) 式を t に関する微分方程式で表せ。
- (b) $(a - 1)^2 - 4b \neq 0$ の場合について、任意定数 c_1, c_2 を含む (1) 式の一般解を求めよ。
- (c) $(a - 1)^2 - 4b = 0$ の場合について、任意定数 c_3, c_4 を含む (1) 式の一般解を求めよ。

次に、関数 $\phi(r)$ の微分方程式

$$\frac{1}{r^m} \frac{d}{dr} \left(r^m \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

について考える。 $m = 1, 2$ とし r を半径とすると、上式は 2 次元軸対称 ($m = 1$) ラプラス方程式および 3 次元球対称 ($m = 2$) ラプラス方程式を表す。いま、この方程式が境界条件 $\phi(r_1) = \phi_1, \phi(r_2) = \phi_2$ ($0 < r_1 < r_2$) を満たすとき、

- (d) 問 (b), (c) で得られた結果を用いて $m = 1$ の場合についての解を求めよ。
- (e) 問 (b), (c) で得られた結果を用いて $m = 2$ の場合についての解を求めよ。

(2) n 次の実対称行列 S が相異なる固有値 λ_i ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$) をもち、ある直交行列 A を用いて λ_i が対角成分になるように対角化できるとする。このとき以下の問に答えよ。ただし、 $(\cdot)^T$ は行列 (\cdot) の転置行列を表す。

- (a) S の行列式 $|S|$ を固有値 λ_i を用いて表し、逆行列 S^{-1} が存在するための λ_i の条件を示せ。
- (b) S^{-1} を A を用いて対角化できることを示せ。
- (c) 列ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ と $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ との間で一次変換 $\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ が成り立つとする。このとき、実 2 次形式 $\mathbf{x}^T S^{-1} \mathbf{x}$ を λ_i と y_i を用いて表せ。
- (d) $n = 3$ とし、行列 S を

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

とするとき、固有値 λ_i ($i = 1, 2, 3$) および直交行列 A を求めよ。

- (e) (2) 式で与えられた S に対して $\mathbf{x}^T S^{-1} \mathbf{x} = 1$ が示す曲面における各主軸が x_1, x_2, x_3 軸となす角を求めよ。また、三つの主軸が曲面と交わる点を求め、曲面の形状の概略を図示せよ。