機械科学 II

（問題１から問題３のすべてに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合は，「問題１（２枚目)」などのように記入せよ.）

問題１

鉄筋コンクリート製のはりを設計する場合，コンクリートの引張強度は圧縮強度に比べ著しく低いために，引張側を鉄筋により補強する．このとき，コンクリートが圧縮のみを受け持ち，鉄筋が引張を受け持つとの仮定を用いて応力が計算される．いま，図１のような長方形断面を持ち，m 本の鉄筋（それぞれ断面積 A_0）で補強された鉄筋コンクリートはりに，曲げモーメント M が作用し，曲率半径 ρ の曲げが生じている．鉄筋と中立面 z-z の位置は，それぞれ，はり断面の上辺から a および c の位置にあり，はりの幅を b とする．簡単のため，上記のようにコンクリートには圧縮応力のみが発生し，引張応力は発生しないとする．圧縮に対するコンクリートのヤング率を E_c とし、鉄筋のヤング率は E_c の n 倍とする．また，鉄筋の断面積は十分小さく，その断面内の応力分布は無視できるとする．以下の問に答えよ．

（１） 鉄筋に作用する垂直応力 σ_s を n, E_c, ρ, a, c を用いて示せ．

（２） 中立面の位置 c を導出せよ．

（３） モーメント M を $E_c, \rho, m, n, a, b, c, A_0$ を用いてあらわせ．

（４） $a = 560$ mm, $b = 500$ mm, $A_0 = 400$ mm^2, $m = 4$, $n = 10$ とするとき，c を計算せよ．

（５） （４）のとき，コンクリートの圧縮許容応力を $\sigma_{ac} = 12$ MPa，鉄筋の引張許容応力を $\sigma_{as} = 120$ MPa とするとき，このはりに負荷しうる最大曲げモーメント M_{max} を求めよ．

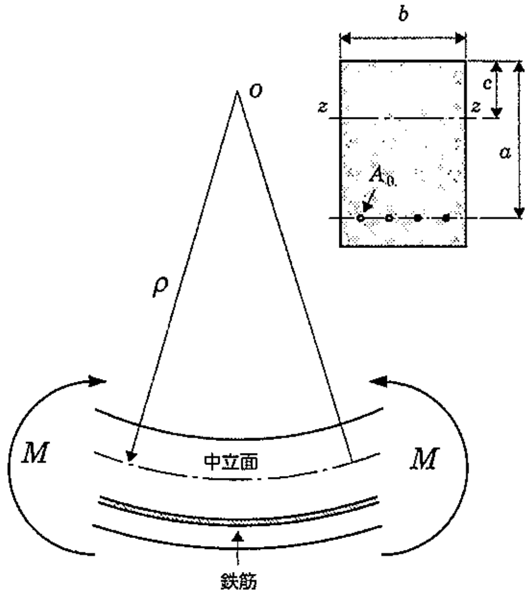

図１

問題２

図２に示すように，速度 U（>0）で x 軸方向に移動する壁面に向かい合って，傾斜をもった固定片が置かれ，移動壁と固定片の間のくさび状の隙間に，液体が引き込まれた場合の隙間内の流れを考える．液体は，粘度が μ（一定）の非圧縮性流体で，流れは x-y 面内の２次元定常流れと仮定する．固定片の x 方向の長さを L とし，x=0，L における隙間をそれぞれ h_1，h_2（$<<L$），圧力を p_0（一定）とする．x 軸方向の流速を $u(x,y)$，隙間内の位置 x における液体の圧力を，x のみの関数として $p(x)$とし，位置 x における隙間を $h(x)$とする．y 軸方向の流速は，u に比べて十分小さいものとして無視する．また，液体の慣性力は小さく無視でき，かつ $\left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| << \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 図２中の微小要素（dx,dy）に作用する x 方向の力の釣り合いを考え，隙間内の圧力 p とせん断応力 τ の関係を求めよ．

(2) せん断応力 τ を粘度 μ，流速 u を用いて表せ．

(3) 圧力 p と流速 u の関係を求めよ．

(4) (3)で求めた式から流速 u を求めるための境界条件を示せ．

(5) 流速 u を求めよ．ただし，dp/dx を用いて表してよい．

(6) 隙間を流れる液体の単位幅（紙面垂直方向）あたりの体積流量を求めよ．

(7) dp/dx=0 となる h を h_p と置いて，流量を表せ．

(8) (6)，(7)で得られた結果に対して流量一定の関係を適用し，dp/dx を，μ，U，h，h_p を用いて表せ．

(9) 隙間 $h(x)$が h_1 から h_2 まで直線的に減少し，$h(x)=h_1-(h_1-h_2)x/L$ で与えられるものとする．(8)で得られた dp/dx を積分することにより p と h_p を求めよ．（ただし，h を使って p を表してよい．）

(10) 最大圧力が発生する位置 x と最大圧力を求めよ．

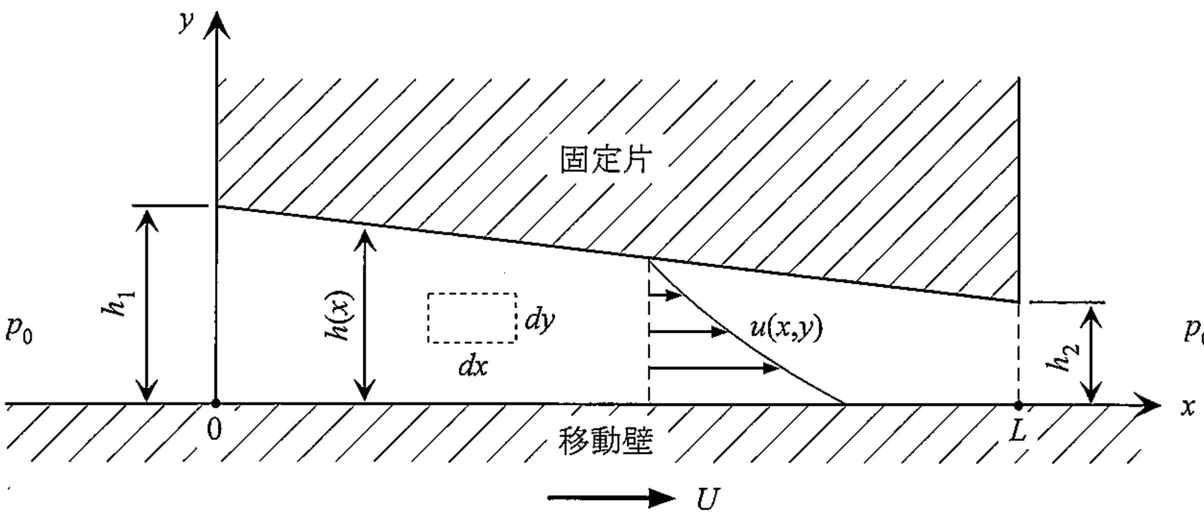

図２

問題3

ある実験において得られた $n+1$組の標本データ $(x_\mathrm{k}, y_\mathrm{k})$ $(k=0,1,\dots,n)$ がある. ただし, $n \geq 2$ で, $x_0 < x_1 < \cdots < x_\mathrm{n}$ とする. これらの標本データから x と y の関係を首尾良く表現する関数 $y=s(x)$ を考えよう. 図 3 のように, $s(x)$ は標本区間全域 $[x_0, x_\mathrm{n}]$ において連続な関数とし, その1階および 2 階の導関数 $s'(x)$, $s''(x)$ もまた連続とする. ここでは, x の区間全域 $[x_0, x_\mathrm{n}]$ を小区間 $[x_{\mathrm{k}-1}, x_\mathrm{k}]$ $(k=1,2,\dots,n)$ に分割し, 小区間毎の区分関数 $y=s_\mathrm{k}(x)$ $(x_{\mathrm{k}-1} \leq x \leq x_\mathrm{k},\ k=1,2,\dots,n)$ を求め, その連結によって標本区間全域の $y=s(x)$ を表現する. なお, 各区分関数 $y=s_\mathrm{k}(x)$ は以下の条件を満たすものとする.

[条件 1]
区分関数 $y=s_\mathrm{k}(x)$ は 3 次の多項式である.

[条件 2]
区分関数 $y=s_\mathrm{k}(x)$ の両端において, y の値が標本値と一致する. すなわち,

$$y_{\mathrm{k}-1} = s_\mathrm{k}(x_{\mathrm{k}-1}) \qquad (k=1,2,\dots,n)$$
$$y_\mathrm{k} = s_\mathrm{k}(x_\mathrm{k}) \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

[条件 3]
x_0, x_n を除く各標本点 x_k において, 隣接する区分関数 $s_\mathrm{k}(x)$, $s_{\mathrm{k}+1}(x)$ の1階および2階微分の値がそれぞれ一致する. すなわち,

$$s'_\mathrm{k}(x_\mathrm{k}) = s'_{\mathrm{k}+1}(x_\mathrm{k}) \qquad (k=1,2,\dots,n-1) \qquad (*)$$
$$s''_\mathrm{k}(x_\mathrm{k}) = s''_{\mathrm{k}+1}(x_\mathrm{k}) \qquad (k=1,2,\dots,n-1) \qquad (**)$$

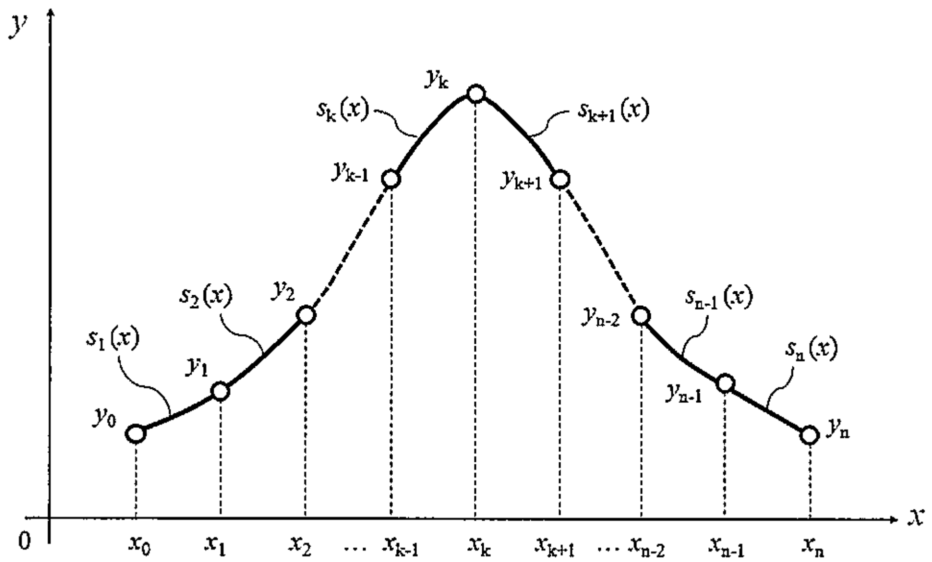

図3

問題3の続き

以下，$s''_k = s''_k(x_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ と略記し，また，$s''_0 = s''_1(x_0)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) [条件 1], [条件 3 (**)] より，$s''_k(x)$ は s''_{k-1}，s''_k を用いて，次のように表現される．

$$s''_k(x) = \alpha_k s''_{k-1} + \beta_k s''_k \quad (x_{k-1} \le x \le x_k) \tag{I}$$

α_k, β_k を x，x_{k-1}，x_k を用いて表せ．

(2) 式 (I) および [条件 2] より，$s_k(x)$ は次のように表現される．

$$s_k(x) = A_k \frac{(x-x_{k-1})^3}{x_k-x_{k-1}} + B_k \frac{(x-x_k)^3}{x_k-x_{k-1}} + C_k \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} + D_k \frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}} \quad (x_{k-1} \le x \le x_k) \tag{II}$$

A_k，B_k，C_k，D_k を x_{k-1}，y_{k-1}，x_k，y_k，s''_{k-1}，s''_k を用いて表せ．

(3) 式 (II) および [条件 3 (*)] より，次式が成り立つことを示せ．

$$(x_k - x_{k-1})s''_{k-1} + 2(x_{k+1} - x_{k-1})s''_k + (x_{k+1} - x_k)s''_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} - \frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right) \tag{III}$$

(4) 次の標本データに対し，s''_k $(k = 1, 2, 3)$ をそれぞれ求めよ．ただし，$s''_0 = 0$，$s''_4 = 0$ とする．

k	x_k	y_k
0	-2	14
1	-1	35
2	0	70
3	1	35
4	2	14

(5) (4) の標本データに対して，区分関数 $s_3(x)$ $(0 \le x \le 1)$ を求めよ．

(6) 求めた区分関数より，$x = 0.5$ における y の値を求めよ．

このようにして区間毎に求めた区分関数 $y = s_k(x)$ を全域に渡って連結することにより，
標本データを滑らかにつなぐ自然スプライン $y = s(x)$ $(x_0 \le x \le x_n)$ を得ることができる．