機械科学 I

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には,「問題１（２枚目)」などのように記入せよ.）

問題 1　(小問 (1), (2) の両問に答えよ)

(１) 関数 $u(x)$ が，境界条件 $u(0)=0,\ u(1)=1$ のもとで２階常微分方程式

$$\epsilon\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}-(-1)^m(1-\epsilon)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u+1=0 \tag{1}$$

を満たすとする．$\epsilon\ (\geq 0)$ を微小パラメータ，m を整数とするとき，$0\leq x\leq 1$ での解の振る舞いについて以下の問に答えよ.

(a) $m=1,2$ のそれぞれの場合について，$\epsilon>0$ として，上式の厳密解を示し，$x=0,1$ で $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ を求めよ.

次に $\epsilon\ (>0)$ が十分小さい場合の (1) 式の近似解をもとめる．まず，$m=1$ の場合について考える.

(b) $\epsilon=0$ とおいて得られる式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u+1=0$$

で，$x=1$ での境界条件を満たす解 $u^o(x)$ を求めよ.

(c) $x=0$ 近傍での解を求めるため，変数変換 $x=\epsilon X$ を用いて書き換えた式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}X^2}+(1-\epsilon)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}-\epsilon u+\epsilon=0$$

について考える．上式で $\epsilon=0$ とおいて得られる方程式の解 $u^i(X)$ が $x=0$ での境界条件を満たすとして，その解を求めよ．ただし，$0<x<1$ の領域で $\lim_{x\to 0}u^o(x)=\lim_{X\to\infty}u^i(X)$ であるとき，$u^o(x)$ と $u^i(X)$ が接続可能であることに注意せよ.

同様にして，(1) 式で $m=2$ の場合について考える.

(d) $\epsilon=0$ とおいて得られる式で，$x=0$ での境界条件を満たす解 $u^o(x)$ を求めよ.

(e) $x=1$ 近傍での解を求めるため，変数変換 $x-1=\epsilon X$ を導入することにより得られる式で，$\epsilon=0$ とおくことによりその解 $u^i(X)$ をもとめよ.

以上の結果を考慮して

(f) $m=1$ と２の場合で，十分小さな $\epsilon\ (>0)$ に対して，解の振る舞いがどのように異なるか，その概略を図示して説明せよ.

問題 1 の続き

(2) b, c を $b^2 > c$ を満たす実数定数とするとき，漸化式

$$x_{n+2} = 2bx_{n+1} - cx_n$$

について，以下の問に答えよ．ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする．

(a) $\boldsymbol{y}_n = (x_n, x_{n+1})^t$ として $\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_n$ と表すとき，行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．ただし，$()^t$ は転置を表す．

(b) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を求めよ． ただし，$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ とする．

(c) c_1, c_2 を定数として，$\boldsymbol{y}_0 = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$ と表すことができる．このとき，$\boldsymbol{y}_n$ を固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を用いて表せ．

(d) 初期値 x_0, x_1 を用いて c_1, c_2 を表せ．

(e) $b = \dfrac{1}{2}$, $c = -3$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$ を計算せよ．

問題２

図 2-1 のように，長さ L の糸でつるされた質量 m の 3 個の質点が，ばね定数 k の 2 本の線形ばねで結ばれているばね質点系を考える．糸およびばねの質量は無視でき，糸は伸び縮みせず，たるむことはない．鉛直下向き方向には重力が働いており，各質点は天井の固定点を中心とした紙面内の振り子運動を続けるが，振り子の振幅は十分小さく，各質点の運動は水平方向のみと見なせる．平衡状態からの各質点の変位をそれぞれ x_1，x_2，x_3 とするとき，以下の問に答えよ．なお，重力加速度の大きさを g とする．

(1) 各質点に対する運動方程式を示せ．

(2) 系の固有角振動数 $\omega^{(1)}$，$\omega^{(2)}$，$\omega^{(3)}$ を求めよ．ただし，$\omega^{(1)} < \omega^{(2)} < \omega^{(3)}$ とする．

(3) 固有角振動数 $\omega^{(1)}$，$\omega^{(2)}$，$\omega^{(3)}$ に対する固有振動モードを求めよ．ただし，各モードの第 1 成分を 1 として正規化すること．さらに，各質点はどのように振動するかを述べよ．

次に，図 2-2 のように，長さ L の糸でつるされた質量 m の N 個の質点が，ばね定数 k の $N-1$ 本の線形ばねで結ばれている紙面内 N 自由度のばね質点系を考える．平衡状態からの質点 i の変位を $x_i\,(i=1,2,3,\cdots,N)$ とするとき，以下の問に答えよ．ただし，$N \geq 3$ とする．

(4) 質点 i に対する運動方程式を示せ．

(5) 質点 i の変位 $x_i\,(i=1,2,3,\cdots,N)$ に対する周期解として

$$x_i = u_i \cos(\omega t + \phi), \qquad u_i = A\cos\left[p\left(i-\frac{1}{2}\right)\right]$$

の形のものを考えるとき，系の固有角振動数 ω を p の関数として表せ．ここで，ϕ，A は定数，t は時刻を表す．

(6) ω の最小値と最大値を求めよ．

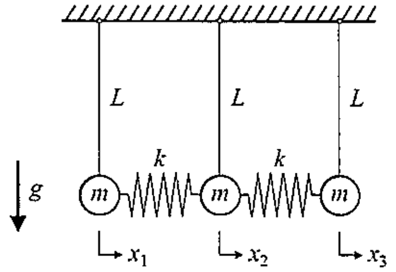

図 2-1

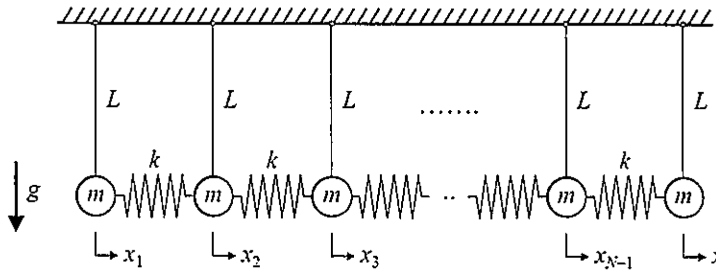

図 2-2

問題３　（次の（１）（２）の両方を解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ.）

（１）図 3–1 のように，半径 a，長さ L，熱伝導率 k，比熱 c，密度 ρ，単位長さあたりの電気抵抗 r の円柱（以下，円柱Ｃとよぶ）が，熱容量が十分に大きな柱Ｐで支持されている．支柱Ｐおよび周囲の流体の無限遠での温度は T_0 で一定である．いま，円柱Ｃには一定の電流 i が流れており，これにより一様な内部発熱があるとする．また，周囲の流体の流れによる熱伝達率を h とする．円柱Ｃは十分に細く，x 軸を円柱Ｃの軸方向に平行に定義したとき（円柱Ｃの両端の x 座標を $x=0$，L とする），その温度分布は x のみによる．なお，円柱Ｃからの輻射は無視できる．

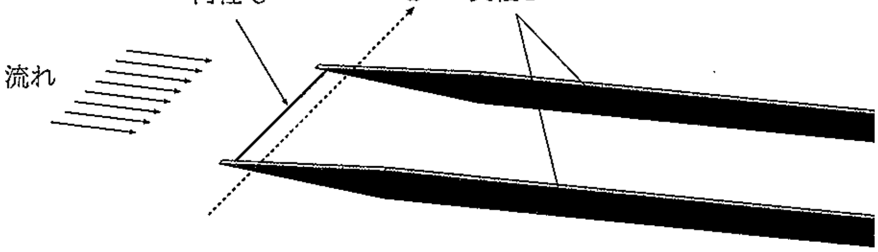

図 3–1

まず，電流 i および周囲流体の速度が一定（熱伝達率 h が一定）のまま十分に時間が経過したのちの定常状態を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(a) 円柱Ｃの単位長さあたり，単位時間あたりの内部発熱量を求めよ．なお，これを q と表し，以下の設問の解答に用いてよい．

(b) 長さが δx の円柱Ｃの微小部分（図 3–2）のエネルギーの収支から，円柱Ｃ内の温度分布 $T(x)$ が従う方程式を導け．

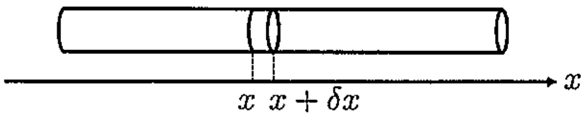

図 3–2

(c) $x=0$，L で温度が一定値 T_0 に保たれていることに注意して，$T(x)$ を求めよ．ただし，$\beta=\sqrt{\frac{2h}{ak}}$ と表して，解答に用いよ．

(d) $a/L \ll 1$ のとき，円柱Ｃの中央（$x=L/2$）での温度を求めよ．

次に，時刻 $t=0$ において，流体の速度が変化して，熱伝達率 h が瞬時に微小量 Δh だけ大きくなり，$t \geq 0$ では一定値 $h+\Delta h$ に保たれたとする．このとき以下の問に答えよ．

(e) 円柱Ｃの熱伝導率を $k=180$ W/Km，半径を $a=2$ μm，長さを $L=10$ mm，また，熱伝達率を $h=5\times10^3$ W/Km^2 とするとき，円柱Ｃの温度の時間変化に対して，熱伝達と軸方向の熱伝導のどちらが支配的かを論ぜよ．

(f) (e) の状況のとき，時刻 t における円柱Ｃの中央での温度を求めよ．ただし，(e) で与えた数値を用いず，記号を用いて答えよ．

問題３の続き

（２）図 3–3 の p–v 線図に示すように，理想気体が状態変化 1→2→3→4→1 を繰り返すサイクルを考える．ここに，p，v，T は気体の圧力，比体積（単位質量当たりの体積），絶対温度を表す．v_1，v_2, v_3 は状態 1, 2, 3 の気体の比体積を表し，$v_1 > v_2$ とする．また，状態 1 の圧力は状態 2 の圧力より高いとする．この気体の定積比熱を c_v，気体定数を R とする．c_v は気体の温度に依存せず一定である．

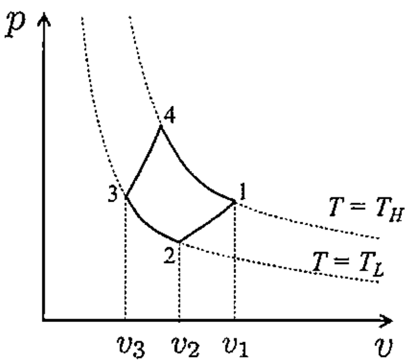

図 3–3

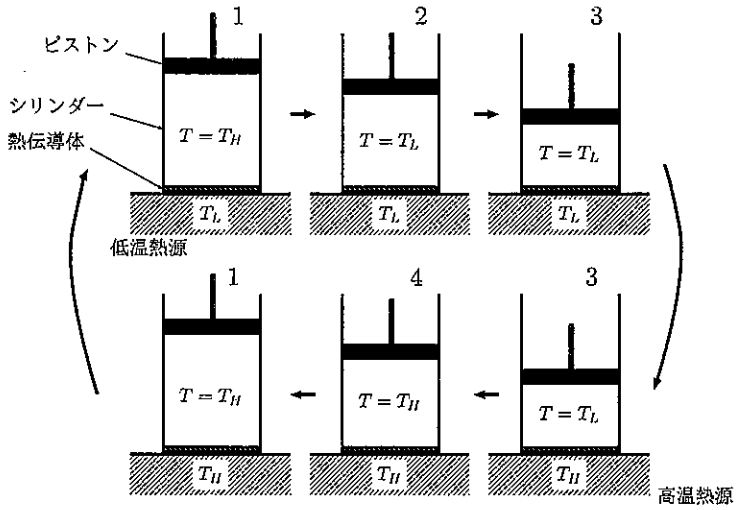

図 3–4

図 3–4 に示すように，気体はシリンダ内に封入されており，ゆっくりと滑らかに動くピストンにより気体の体積を変化させる．このサイクルでは，状態 1 の気体を，熱容量が無視でき熱抵抗が大きい熱伝導体を介して絶対温度 T_L の低温熱源と接触させ，ゆっくりと気体から熱源に熱を移動させる．状態 2 で気体の温度は熱源温度 T_L に一致し，状態変化 2→3 では気体は温度を T_L に保ちながら熱源へ熱を放出する．次に，状態 3 の気体を，熱伝導体を介して絶対温度 T_H （$> T_L$）の高温熱源と接触させ，ゆっくりと熱源から気体に熱を移動させる．状態 4 で気体の温度は熱源温度 T_H に一致し，状態変化 4→1 では気体は温度を T_H に保ちながら熱源から熱を得る．状態変化 1→2 および 3→4 では，単位質量の気体が得る（放出する）熱量が，気体温度の微小変化 $\mathrm{d}T$ に対応して，$\mathrm{d}q = c\mathrm{d}T$ によって与えられるものとする．ここに，c は，状態変化 1→2，3→4 に共通する定数である．なお，気体は，熱伝導体との接触面以外では断熱されている．

(a) 状態 1，2 の気体の比体積の比 v_1/v_2 を求めよ．

(b) 定数 c の取り得る範囲は $c_v < c < c_v + R$ であることを示せ．

(c) サイクル 1→2→3→4→1 に関するクラウジウスの積分を求めよ．また，このサイクルは可逆か不可逆かを判定し，その判定理由を述べよ．一般に，クラウジウスの積分は周積分 $\oint \mathrm{d}q/T^{(e)}$ （q は単位質量の気体が熱源から得る熱量，$T^{(e)}$ は熱源の絶対温度）により与えられる．

(d) サイクル 1→2→3→4→1 の熱効率 $(q_i - q_o)/q_i$ （q_i は 1 サイクルで単位質量の気体が熱源から得る熱量，q_o は熱源に放出する熱量）を求めよ．また，もし状態変化 1→2 で熱源に捨てていた熱量を再生し，状態変化 3→4 で気体に与えられるとした場合に対して，熱効率を求めよ．