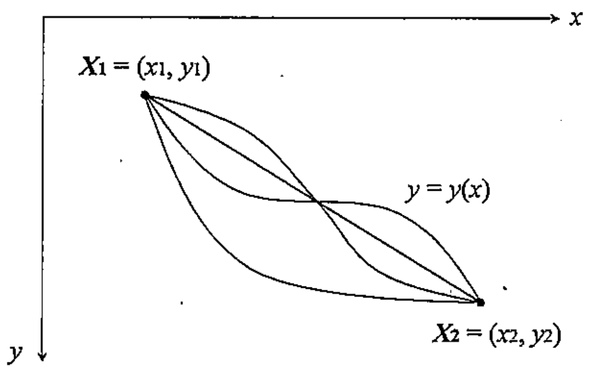
機械科学Ｉ

(問題１から問題３のすべてに解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の解答用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」のように記入せよ.)

問題１

xy 平面内の２点 $\boldsymbol{X_1} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{X_2} = (x_2, y_2)$ を通る滑らかな曲線 $y = y(x)$ について，以下の問に答えよ.



(1) y, y', x の関数 $f(y, y', x)$ を考える．ただし，$()' = \frac{d}{dx}$ とする．このとき，

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)dx$$

で与えられる汎関数 J を極小化あるいは極大化する曲線 $y_c = y_c(x)$ $(x_1 < x < x_2)$ を求めよう．曲線 y_c の近傍曲線を次のように記述する.

$$y \equiv y_c + \alpha\eta(x)$$

ここで，α は微小パラメータ，$\eta(x)$ は x の微分可能な任意関数であり，$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ とする．α の関数となるこの近傍曲線に対する J の極値条件 $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ より曲線 y_c が

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(y_c, y_c', x)}{\partial y_c'}\right) - \frac{\partial f(y_c, y_c', x)}{\partial y_c} = 0$$

を満足することを示せ.

(2) $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ を結ぶ曲線の長さを汎関数 J とするとき，$f(y, y', x)$ はどのように記述されるか.

(3) (1), (2) の結果を用いて，任意の２点を結ぶ曲線群において長さが最短となるものは直線であることを示せ.

問題１の続き

次に, xy 平面の y 軸正方向に重力加速度 g が働き, 質点が $\boldsymbol{X}_1$ から $\boldsymbol{X}_2$ へ曲線 y に沿って降下し, 到達する場合を考えよう. ただし, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ とし, $\boldsymbol{X}_1$ における質点の初速をゼロ, 降下に伴う摩擦の影響は無視できるものとする. このとき, 運動エネルギーと重力による位置エネルギーの和の保存則より質点速度 v は

$$v = \sqrt{2g(y - y_1)}$$

のように記述できる.

(4) $\boldsymbol{X}_1$ から $\boldsymbol{X}_2$ への質点の到達時間を汎関数 J とするとき, $f(y, y', x)$ はどのように記述されるか.

(5) (1), (4) の結果を用いて, $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ を結ぶ曲線群において質点の到達時間が最短となる曲線 y_c が満たすべき微分方程式

$$y_c' = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1 - c^2(y_c - y_1)}{y_c - y_1}}$$

を導出せよ. ただし, c はある定数とする.

(6) 曲線 y_c を媒介変数形式で求め, その概形を描け.

問題２

ヤング率（縦弾性係数）が E，断面二次モーメントが I の一様で真直ぐなはりについて，以下の問に全て答えよ．計算過程も示すこと．

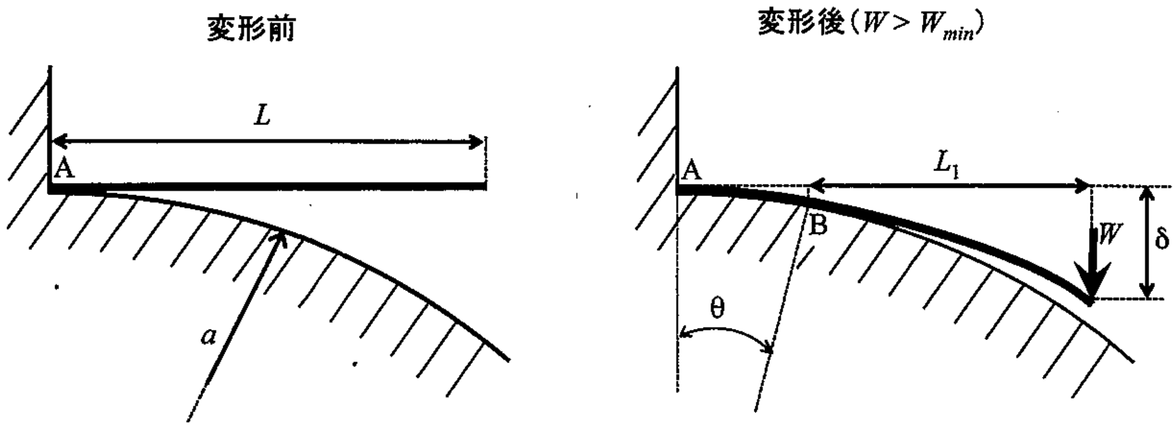
(1) はりが大きさ M の曲げモーメントを受けて変形するとき，生じる曲率半径ρが

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

で与えられることを示せ．

(2)一端が剛体壁に固定された長さ L の片持ちはりの自由端に，荷重 W をはりの長さ方向と垂直な方向に加えるとき，固定端における曲率半径と自由端におけるたわみを E, I, W, L によって表せ．

(3)左図に示すように，長さ L の片持ちはりが点 A において剛体壁に水平に固定されている．はりの下部には半径 a の半円柱形状の剛体があり，点 A においてはりと接している．このはりの自由端に鉛直方向の荷重 W を零から徐々に増やしながら加えていく．$a \gg L$ という条件のもと，自由端におけるたわみδを以下の手順にしたがって求めよう．



(a)荷重 W が十分に小さいとき，はりは点 A だけで円柱面と接触している．しかし，ある荷重 W_{min} を超えると，点 A から始まるはりの一部が円柱面に接触するようになる．このような接触が始まる最小の荷重 W_{min} を E, I, L, a によって表せ．

問題２の続き

以下,. $W>W_{min}$ の場合を考える.

(b)右図に示すように，はりは鉛直軸から角度θの円周上の点Ｂまで円柱面に接触したとする．点Ｂから自由端までの水平距離を L_1 とおくとき，L_1 とθを E, I, L, a, W によって表せ.（ヒント：θ<<1 であり，また，曲率半径が a の点Ｂではりは円柱面から離れる.）

(c)たわみδを L, a, E, I, W によって表せ.

(d)はり全長を円柱面に接触させるために必要な荷重 W について２００字程度で議論せよ.

問題 3

緩やかな堰（せき）を越える流れについて以下の問に答えよ．ただし，流体は非圧縮，非粘性とし，定常流れを考える．底面は滑らかであり，重力加速度を g，大気圧を p_0 とする．また，表面張力の影響は考えないものとする．

(1) 図1に示すように，水平，鉛直方向にそれぞれ x, z 座標軸をとり，紙面 x, z 面内での流れを考える．なお，紙面垂直方向には流れはないとする．流体密度を ρ とし，上流での流れは一様で，流速 U と深さ H は一定である．堰の長さは深さ h に比べて十分長く，堰の高さ b は緩やかに変化し，$x = x^*$ で最大値をとる．いま，深さ h は十分浅いため流れは断面にわたって一様であり，流速は水平方向速度 u であたえられ，圧力は静水圧 $p = p_0 + \rho g(h + b - z)$ であるとする．

(a) u と h を決定するための式を導け．

(b) u, h が x の関数であることに注意して，$\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$ の関係を $F = u/\sqrt{gh}$ で定義される局所フルード数を用いて示せ．また，$\mathrm{d}F/\mathrm{d}x$ を $F, \mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ および h を用いて表せ．

(c) 自由表面が図1に示すように $x = x^*$ で $h + b$ が極値を取るとき，すなわち $\mathrm{d}(h + b)/\mathrm{d}x = 0$ になるとき，F の取りうる値の範囲を求めよ．

(d) 上流でのフルード数を $F_0 = U/\sqrt{gH}$ と定義し，上流で $F = F_0 < 1$ のとき，$x = x^*$ で $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x \neq 0$ である場合を考える．このとき堰付近での h と F の増減を調べ，表面高さ $b + h$ の概形を図示せよ．

(e) 前問で現れる流れを限界流れとよぶ．この流れがおこるとき，$x = x^*$（堰頂点）での深さ $h = h^*$ と堰の高さ $b = b^*$ を H および F_0 を用いて表せ．また，$F_0 \to 0$ で限界流れがおこる場合の b^*, h^* を求めよ．

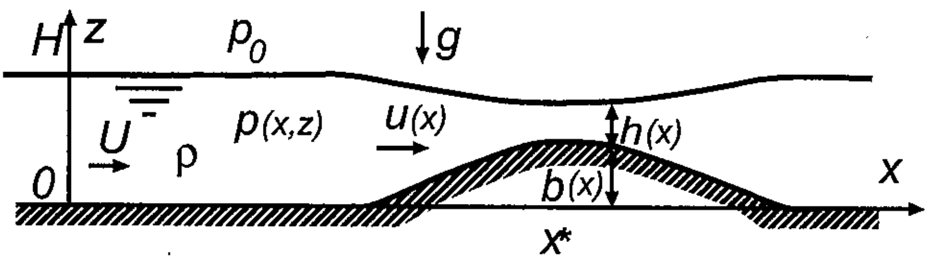


図１

問題 ３の続き

（２）図２に示すように，密度 ρ_1, ρ_2（一定）で密度差 $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$（$\rho_1 < \rho_2$）の二層流体が堰を越える場合を考える．ただし，二種類の流体の混合はないものとし，（１）と同様，x, z 面内で流れを考える．上流での流れは一様で，流速 U_1, U_2，厚み H_1, H_2 は一定である．深さは十分浅いので，流速は水平成分 u_1, u_2 のみを考え，圧力は静水圧 p_1, p_2 であたえられるとする．また，堰の高さ b は緩やかに変化し，$x = x^*$ で最大値をとる．

(f) 各層での流速 u_1, u_2 および厚み h_1, h_2 を決定するための式を導け．

(g) 堰付近での上層及び下層厚さの変化 $\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}x$ を $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$，$\Delta\rho/\rho_2$ 及び局所フルード数 $F_1 = u_1/\sqrt{(\Delta\rho/\rho_2)gh_1}$, $F_2 = u_2/\sqrt{(\Delta\rho/\rho_2)gh_2}$ を用いて表せ．

(h) 前問の結果から，限界流れが発生するための条件を F_1, F_2, $\Delta\rho/\rho_2$ を用いて表せ．また，$\Delta\rho \simeq 0$，上流で $F_1, F_2 \ll 1$ を仮定した場合，限界流れがおこるときの堰付近での表面高さ $b + h_1 + h_2$ 及び界面高さ $b + h_2$ の概形を図示せよ．

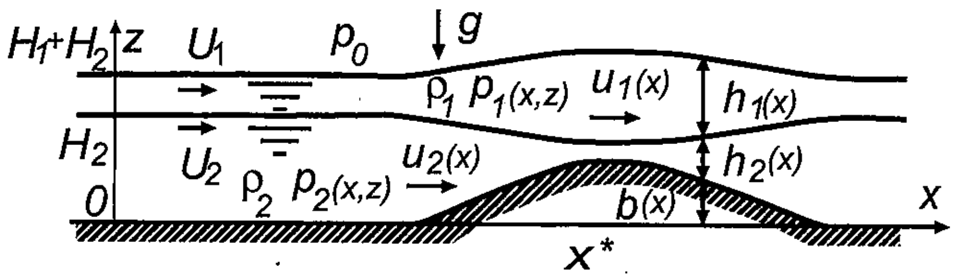


図２