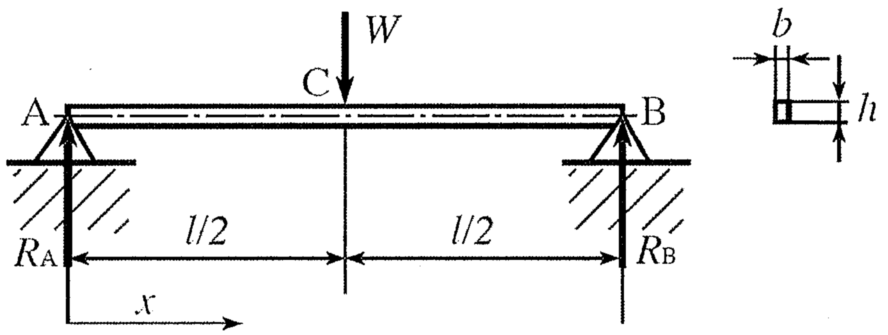
機械科学 II

（問題１から問題３のすべてに解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題 1

図のように，長方形断面（幅 b, 高さ h）をもつ長さ l のはりが両端で単純支持されており，はりの中点 C で集中荷重 W を受けている．はりの材料のヤング率（縦弾性係数）は $\boldsymbol{E}$ である．支持点 A, B での抗力をそれぞれ R_A, R_B，点 A を原点とする座標を x とする．



図

断面の幅を $b=b_0$，高さを $h=h_0$ と一定にしたとき，以下の問（1），問（2）に答えよ．

（1）　曲げ応力の最大値 σ_{max} を求めよ．

（2）　最大たわみ δ_{max} を求めよ．

次に，各断面の幅を $b=b_0$ と一定として，h を変化させる場合を考える．$x=l/2$ の位置での高さを $h=h_0$ として，以下の問（3）～問（6）に答えよ．

（3）位置 x（$0<x<l$）における断面内の最大曲げ応力が位置に依存せず一定の値になるようにした．このとき，高さ h を h_0, l, x を用いて表せ．

（4）問（3）で求めた，はりの外観図を示せ．

（5）はり全体において高さを $h=h_0$ と一定にした場合の体積 V_1 と，問（3）の場合における体積 V_2 を求め，両者を比較せよ．

（6）はり全体において高さを $h=h_0$ と一定にした場合の最大たわみ δ_1 と，問（3）の場合における最大たわみ δ_2 を求め，両者を比較せよ．

問題 2

(次の（1）,（2）の両方を解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．)

（1）一定容積の容器に封入された定積比熱 c_v，質量 m_h の理想気体を高温熱源とする可逆熱機関がある．この熱機関は，高温熱源として用いる気体から熱量 Q_h を得て，外部に W の仕事をし，低温熱源に熱量 Q_ℓ を与える．この過程で，気体の絶対温度は，T_h から $T_h{}'$ まで低下する．ただし，気体の定積比熱及び定圧比熱は温度に依らず一定であり，また容器の熱容量は無視でき，気体は熱機関以外とは熱の授受を行わないものとする．以下の問に答えよ．

(a) 熱量 Q_h を求め，T_h，$T_h{}'$，m_h，c_v を用いて表せ．

(b) この過程における気体のエントロピー変化を求め，T_h，$T_h{}'$，m_h，c_v を用いて表せ．

低温熱源の絶対温度 T_ℓ が一定である場合を考える．

(c) 熱量 Q_ℓ を求め，T_h，$T_h{}'$，T_ℓ，m_h，c_v を用いて表せ．

次に，一定容積の容器に封入された，高温熱源と同種類の理想気体 (定積比熱 c_v) を低温熱源とする場合を考える．高温熱源と同様，低温熱源として用いる気体の容器の熱容量も無視でき，低温熱源とする気体も熱機関以外とは熱の授受を行わないものとする．低温熱源とする気体の質量は m_ℓ であり，上の過程でこの気体の絶対温度は，T_ℓ から $T_\ell{}'$ まで上昇する．

(d) 温度 $T_\ell{}'$ を求め，T_h，$T_h{}'$，T_ℓ，m_h，m_ℓ を用いて表せ．

(e) 低温熱源とする気体の質量が十分大きい場合（$m_h/m_\ell \ll 1$）の熱量 Q_ℓ を求め，T_h，$T_h{}'$，T_ℓ，m_h，c_v を用いて表せ．必要があれば，$a > 0$，$|x| \ll 1$ のとき $a^x \approx 1 + (\ln a)\,x$ なる近似が成り立つことを用いよ．

（2）厚さが一定で内部発熱のある平板の温度分布に関して以下の問に答えよ．ただし，平板の比熱 c, 密度 ρ, 熱伝導率 k は一定とし，板の厚みを L，両面での温度は常に T_0 に保たれているとする．また，平板は無限に広がっていると仮定し，温度の空間的変化は厚み方向のみにあり，その方向を x 軸にとる．このとき，板両面は $x = 0$ と $x = L$ にあるものとする．

(a) 単位時間，単位体積当たりの発熱量 Q が，Q_0 を定数として $Q_0 \sin(\pi x/L)$ で与えられるとき，十分に時間がたった後の温度分布 $T_\infty(x)$ を求めよ．さらに，板内部での平均温度を求め，この温度に一致するような一様な内部発熱量 $Q = Q_1$(定数) を Q_0 を用いて表せ．

(b) 発熱が $Q = Q_0(t)\sin(\pi x/L)$ のように Q_0 が時間 t の関数として与えられるとき，時刻 t での温度分布 $T(x, t)$ を $Q_0(t)$ を用いて表せ．ただし，$T(x, 0) = T_0$，$Q_0(0) = 0$ とする．

(c) q, λ を正定数として $Q_0 = q[1 - \exp(-\lambda t)]$ で与えられるとき，時刻 t での温度分布を求めよ．

問題3

図1に示すような(a)機械系(質点-ばね-ダンパ系)と(b)電気系(RLC回路)の2つの物理システムを考える．機械系では，質点の質量をm，ばねのばね定数をk，ダンパの減衰係数をcとし，時刻$t(\geq 0)$において質点に作用する力を$u(t)$，そのときの質点の変位を$y(t)$とする．一方，電気系では，抵抗の値をR，コイルのインダクタンスをL，コンデンサのキャパシタンスをCとし，時刻tにおいて，端子A-B間に印加する電圧を$u(t)$，そのとき回路に流れる電流を$i(t)$，コンデンサに蓄えられる電荷を$y(t)$とする．このとき，2つの物理システムは，ともに定数係数の微分方程式

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=u(t)$$

で記述され，標準形で表すと

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=K\omega_n^2u(t)$$

となる．以下，$0<\zeta<\frac{\sqrt{2}}{2}$として，次の問に答えよ．

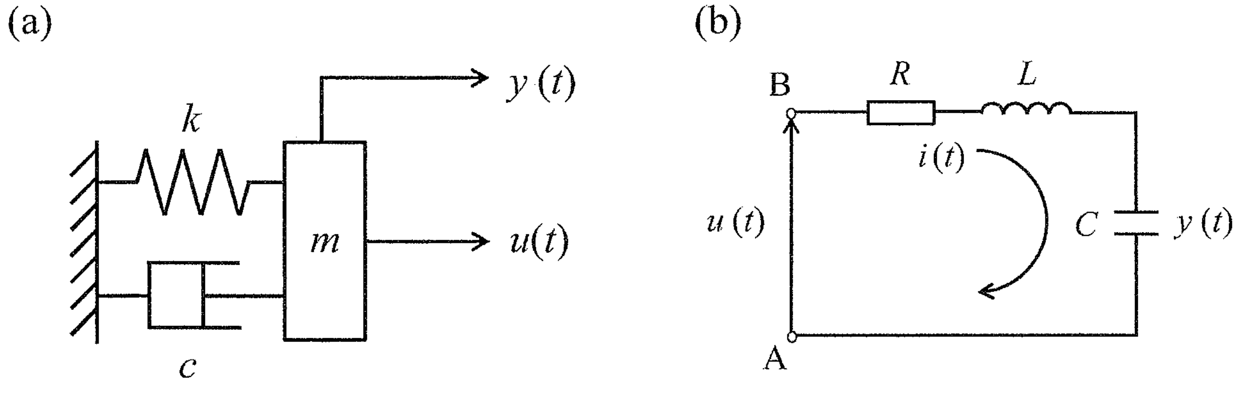


図1: 物理システム((a)機械系，(b)電気系)

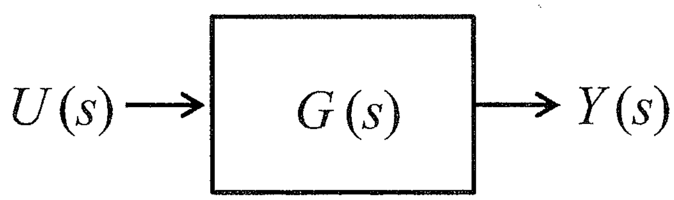


図2: s領域における入出力関係

問題３の続き

(1) 機械系と電気系の２つの物理システムの間には類似関係がある．それぞれの系における支配方程式を導き，ω_n, ζ を求めよ．また，機械系の物理量 (質量 m, ばね定数 k, 減衰係数 c) と電気系の物理量 (抵抗値 R, インダクタンス L, キャパシタンス C) の対応関係を示せ．

(2) $t \geq 0$ で定義される時間の関数 $f(t)$ を考える．このとき，複素数 s に対し，積分

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

が存在するとき，$F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換と呼び，$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ と表す．
関数 $f(t)$ とその導関数 $\frac{df(t)}{dt}$, $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$, … , $\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}$ が連続であり，かつ，$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ のラプラス変換が存在するとき，

$$\mathscr{L}[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} \left(s^{n-k} \cdot \left.\frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}\right|_{t=0} \right)$$

であることを示せ．

(3) 対象の物理システムの入力のラプラス変換 $\mathscr{L}[u(t)]$ を $U(s)$, 出力のラプラス変換 $\mathscr{L}[y(t)]$ を $Y(s)$ とする (図 2)．初期条件 $\left.\frac{d^{k-1}y(t)}{dt^{k-1}}\right|_{t=0}$ $(k = 1, 2)$ を 0 としたときの $U(s)$ と $Y(s)$ の比，すなわち，伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を ω_n, ζ, K を用いて表せ．

(4) 伝達関数 $G(s)$ の極 ($U(s) = 0$ の根) s_0 を求めよ．また，その絶対値 $|s_0|$ と偏角の余弦 $\cos(\arg s_0)$ を求めよ．ただし，虚数単位 $\sqrt{-1}$ を j とする．

(5) s を純虚数 $j\omega$ としたときの伝達関数 $G(j\omega)$ (周波数伝達関数) の絶対値と偏角，すなわちゲイン $|G(j\omega)|$ と位相 $\arg\, G(j\omega)$ とを Ω $(= \frac{\omega}{\omega_n})$, ζ, K を用いて表せ．

(6) ゲイン $|G(j\omega)|$ が最大となる角周波数 ω_p，および，そのときのゲインを求めよ．

(7) 周波数伝達関数の物理的意味を説明せよ．また，ゲインが最大となるのは，どのような現象に対応していると考えられるか．

(8) $\zeta = 0.5, K = 1$ として，周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のゲインと位相の概形を答案用紙の対数グラフに示せ．ただし，横軸は ω を ω_n について正規化した Ω とし，ゲインはデシベル値 [dB] (すなわち $20\log_{10}|G(j\omega)|$)，位相は度 [deg] で表すものとする．また，横軸は対数目盛とする．必要ならば，対数値は図 3 を参照せよ．

問題３の続き

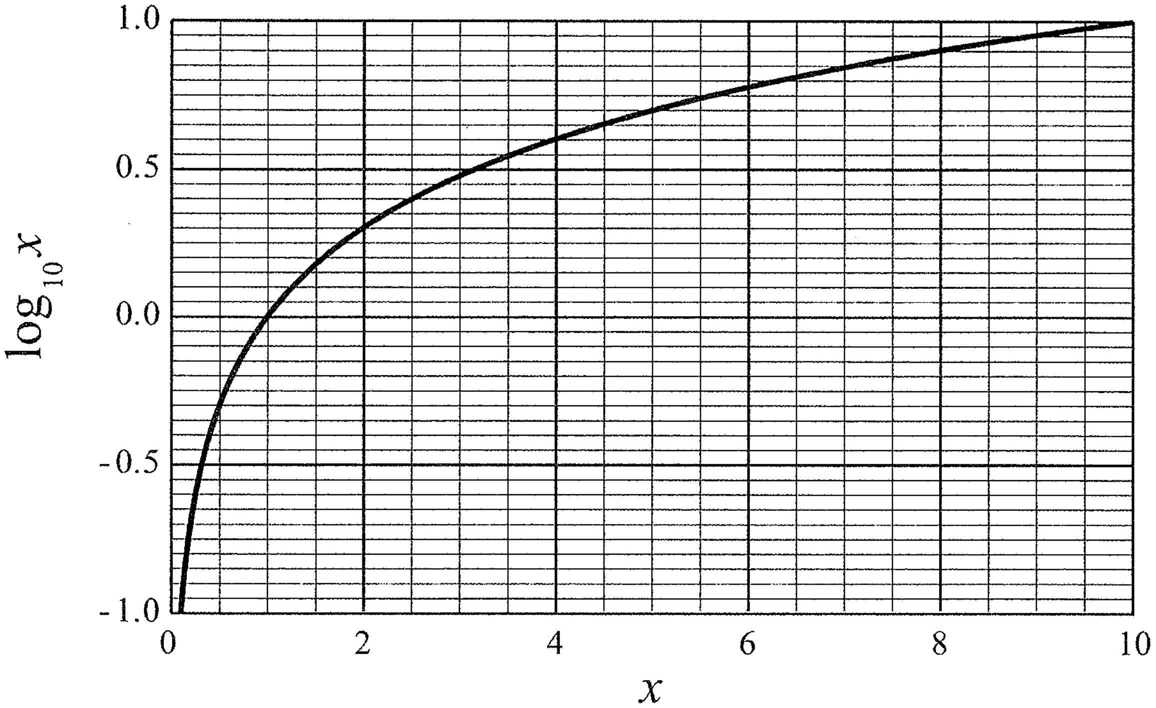


図 3: 対数グラフ