

機械科学 I

(問題1から問題3のすべてに解答し、それぞれ別の解答用紙に記入せよ。各問題に2枚以上の答案用紙を用いる場合には、「問題1 (2枚目)」などのように記入せよ。)

問題1 (次の(1), (2)の両方を解答し、それぞれ別の答案用紙に記入せよ。)

(1) 行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -12 & -5 & 12 \\ -15 & -7 & 16 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ。

- (a) \mathbf{A} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。
(b) 適当な正則行列 \mathbf{Q} によって \mathbf{A} を

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

のように変換できることを示し、 \mathbf{Q} および λ_1, λ_2 を求めよ。

(c) \mathbf{A} と次のベクトル

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

を用いて表現される常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

の一般解を求めよ。

問題1の続き

- (2) 関数 ϕ が、3次元 (x, y, z) 空間のラプラス方程式を満足し、しかも、原点からの距離 r ($= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$) にのみ依存する球対称な場合を考える。すなわち、 $\phi(r)$ に対して次の方程式を考える。

$$\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

- (a) $\Delta\phi$ が次のように変形できることを用いて、

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) \quad (2)$$

式(1)の解を求め、 $\phi = 1/r$ がその一つであることを示せ。

関数 $1/r = G$ とおくと、 G は原点において発散するため、この点では(1)式を満足していない。そこで、 G が原点を含めた全空間で解となる方程式をみるために、

$$\Delta G = f(x, y, z) \quad (3)$$

とにおいて以下の手順により、関数 f を調べてみる。

- (b) まず、 ε を0でない定数とし、 G を正則な関数 $g(r, \varepsilon) = (r^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$ の極限として、以下のよう考える。

$$G(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(r, \varepsilon) \quad (4)$$

この $g(r, \varepsilon)$ に対して、 $\Delta g(r, \varepsilon)$ を求めよ。

- (c) (b)で求めた $\Delta g(r, \varepsilon)$ を $\rho(r, \varepsilon)$ とおく。 $\varepsilon = 1$ および 0.1 に対して、横軸を r として、 $0 \leq r < \infty$ の範囲で $\rho(r, \varepsilon)$ の形の概略を図示せよ。

- (d) $\rho(r, \varepsilon)$ を3次元全空間 V にわたって体積積分したときの値を I とすると、 I の値は ε に依存することなく

$$I = -4\pi \quad (4)$$

となることを示せ。(ヒント：例えば、 $r = \varepsilon \tan \theta$ なる変数変換を用いる。)

- (e) 以上の結果から関数 $f(x, y, z) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ であることを説明せよ。ただし、 $\delta(x), \delta(y), \delta(z)$ はそれぞれデルタ関数であり、それらの積 $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ は次式を満たす。

$$\int_V \delta(x)\delta(y)\delta(z) dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1$$

問題 2

図1に示すように、直径 D の前後輪を持つ、全質量 M の車両がまっすぐで水平なレール上を移動できる。レールの右端に、一端が固定された車両止めが、車両の重心と等しい高さに設置されている。以下の間に答えよ。なお、重力加速度を g とする。

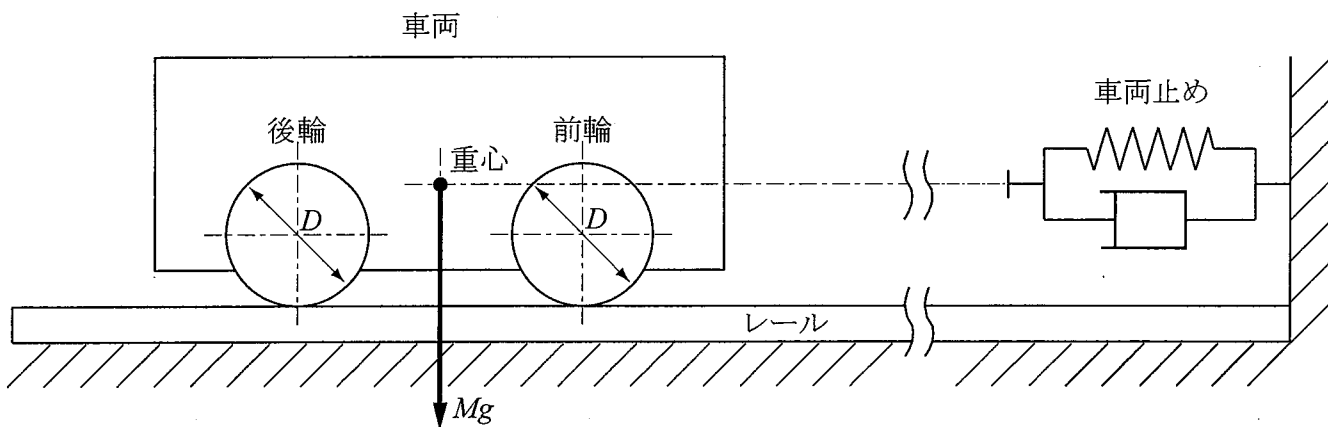


図 1

(1) 図2に示すように、車輪の直径を D 、車輪の厚さを t_w 、車軸の長さを $L+2t_w$ 、車軸の直径を d とする。また、車輪には、直径 d_w の円形の穴（穴の中心から車軸の中心までの距離を r_w ）が5個空いている。車軸および車輪ともに一様な密度 ρ の同一素材でできているとし、車軸を合わせた車輪の車軸まわりの慣性モーメント I を求めよ。

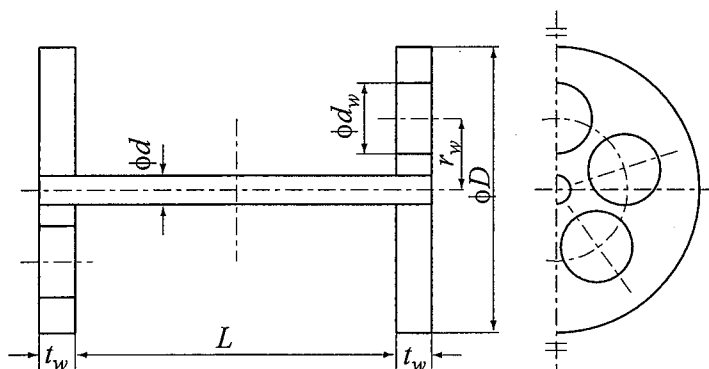


図 2

問題2の続き

以降の間では、車軸を合わせた前輪および後輪の慣性モーメントを I として良い。

(2) 図3に示すように、車両の重心は前後輪から等距離の位置にあり、前後輪の間隔を $2l$ 、レール上端から車両の重心までの距離を h とする。後輪にトルクを与えることにより加速度 α (右向きを正, $\alpha > 0$) で前進している。

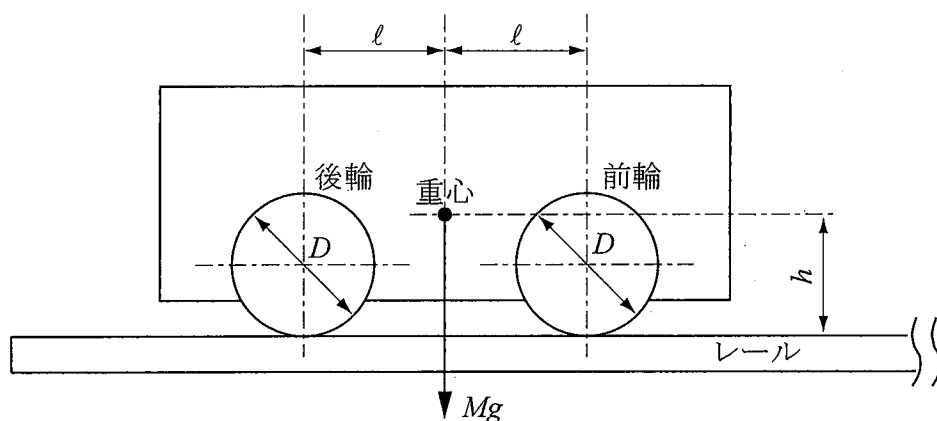


図3

(a) 前輪および後輪に対する垂直抗力を M, g, l, h, α を用いて表わせ。また、車輪がレールから浮き上がらない最大の加速度を求めよ。

(b) 前輪が滑らない最大の加速度を求めよ。なお、車輪とレール間の静止摩擦係数を μ とする。

(3) 車両の後輪を一定トルク N で駆動して前進していたところ、車両は時刻 $t=0$ に速度 v_0 で車両止めに衝突した。衝突後も後輪をトルク N で駆動しつづけ、車両と車両止めは一体となり、車輪が滑ることなく水平に進んだ。車両止めは、ばね (ばね定数 k) とダッシュポット (減衰係数 c) からなり、その質量は無視できるものとする。

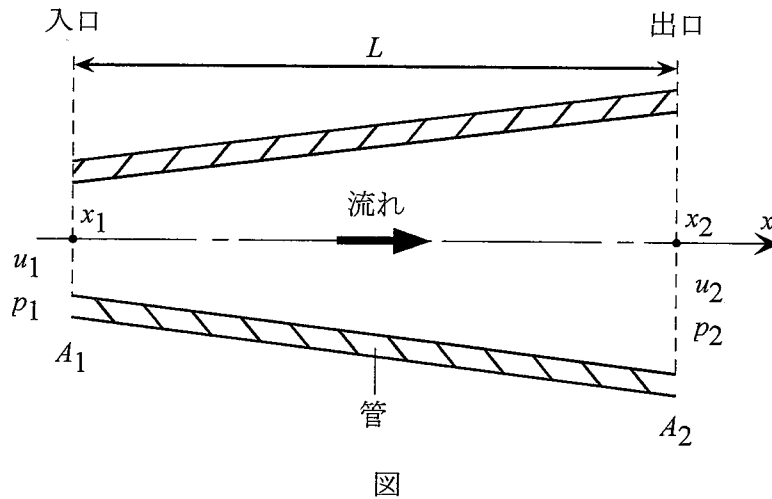
(a) 衝突後の車両の運動方程式は、 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_n^2 x = \beta$ と表わせる。このとき、 γ, ω_n, β を具体的に示せ。ただし、 x は車両の位置を表し、前進方向 (右向き) を正とする。

(b) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ のとき、(a)の運動方程式を解け。ただし、 $\gamma^2 > \omega_n^2$ とする。

(c) 衝突後、車両が静止する位置を示せ。

問題 3

下図に示すような長さ L の管の中を、密度 ρ の非圧縮、非粘性流体が管軸方向 (x 方向) に流れる場合を考える。流路の入口と出口の断面積はそれぞれ A_1, A_2 である。断面積が x 方向に緩やかに変化する 1 次元流れを考え、入口と出口の流速をそれぞれ u_1, u_2 、圧力を p_1, p_2 とする。速度および圧力が x 断面内で一様に分布することを仮定して、以下の問に答えよ。



まず、流れが定常状態にある場合を考える。

- (1) 出口流速 u_2 を u_1, A_1, A_2 を用いて表せ。
- (2) 連続の式とベルヌーイの式を適用し、出口圧力 p_2 を ρ, u_1, p_1, A_1, A_2 を用いて表せ。
- (3) 運動量法則を適用することで、流体から管が受ける x 方向の力を ρ, u_1, p_1, A_1, A_2 を使って示せ。

次に、管の出口が広い空間につながって、出口の静圧が一定に保たれた状態で、入口での全圧に微小変動が与えられた場合の流速 $u_1(t)$ (t は任意の時刻) の応答について考える。

- (4) 以下の文章中の(a)~(f)に適切な数式を入れよ。

x 方向の流速を $u(x,t)$ とし、 x 方向の運動方程式を入口 ($x=x_1$) から出口 ($x=x_2$) まで積分すると、入口の全圧 $p_{t1}(t)$ と出口の全圧 $p_{t2}(t)$ を用いて、次のように非定常のベルヌーイの式を表すことができる。

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = \boxed{\text{(a)}} \quad (1)$$

問題3の続き

管の断面積を $A(x)$ とすると、連続の式より流速 $u(x,t)$ は、 A_1 , $u_1(t)$, $A(x)$ を用いて次のように表される。

$$u(x,t) = \boxed{\text{(b)}} \quad (2)$$

式(2)を用いると、式(1)の左辺を次のように表すことができる。

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = L_e \frac{du_1(t)}{dt} \quad (3)$$

ここで、

$$L_e = \int_{x_1}^{x_2} \boxed{\text{(c)}} dx$$

である。入口と出口の速度と全圧を、大文字で表す時間平均値と、記号「 \sim 」を付けた小文字で表す変動量との和として、次のようにおく。

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 + \tilde{u}_1(t), & u_2(t) &= U_2 + \tilde{u}_2(t) \\ p_{t1}(t) &= P_{t1} + \tilde{p}_{t1}(t), & p_{t2}(t) &= P_{t2} + \tilde{p}_{t2}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)を式(1), (3)に代入し、変動量は時間平均値に比べて十分小さいと仮定して、その2乗の項を無視する。出口の静圧が一定（出口の静圧の微小変動量が0）であることを考慮すると、 $\tilde{u}_1(t)$, U_2 , $\tilde{u}_2(t)$, $\tilde{p}_{t1}(t)$ を用いて、微小変動量に関する非定常のベルヌーイの式を次のように表すことができる。

$$L_e \frac{d\tilde{u}_1(t)}{dt} = \frac{\tilde{p}_{t1}(t)}{\rho} - \boxed{\text{(d)}} \quad (5)$$

また、連続の式を使って、式(5)の $\boxed{\text{(d)}}$ 中の U_2 と $\tilde{u}_2(t)$ を U_1 と $\tilde{u}_1(t)$ を用いて表すと、式(5)を次のように表すことができる。

$$L_e \frac{d\tilde{u}_1(t)}{dt} = \frac{\tilde{p}_{t1}(t)}{\rho} - \boxed{\text{(e)}} \quad (6)$$

角周波数 ω の周期的変動を考え、 $\tilde{p}_{t1}(t)$ および $\tilde{u}_1(t)$ の複素振幅をそれぞれ \bar{p}_{t1} と \bar{u}_1 として、 $\tilde{p}_{t1}(t) = \bar{p}_{t1} e^{i\omega t}$, $\tilde{u}_1(t) = \bar{u}_1 e^{i\omega t}$ (i : 虚数単位) とおく。また、無次元角周波数 $\alpha = \omega L_e / U_1$ を定義すると、式(6)から、複素振幅 \bar{p}_{t1} と \bar{u}_1 の比に関して次式が成り立つ。

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{p}_{t1} / \rho U_1} = \boxed{\text{(f)}} \quad (7)$$

(5) $A_2 / A_1 = 1$ の場合、無次元角周波数 $\alpha (= \omega L_e / U_1)$ をパラメータとして $\bar{u}_1 / (\bar{p}_{t1} / \rho U_1)$ が表す曲線を複素平面上に描け。ここで、 $\bar{u}_1 / (\bar{p}_{t1} / \rho U_1)$ の実部と虚部の値は、 α の値が0に漸近するとそれぞれ1と0に漸近し、一方、 α の値が ∞ に漸近すると共に0に漸近する。このような応答が得られる理由を説明せよ。