機械科学 II

（問題 1 から問題 3 のすべてに回答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．各問題に 2 枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題 1（2 枚目）」などのように記入せよ.）

問題 1

図 1 に示すように，半径 a の糸巻きを同心軸上に持つ半径 R の車輪が，傾斜角 γ の斜面上を運動する．ここで，図 1(a) に示すように，車輪と糸巻きは一体で厚さはともに t であり，材料の密度は ρ である．ただし，糸は十分に長く，その体積と質量は無視できるものとする．また，重力加速度を g とし，斜面と車輪の間の静止摩擦係数と動摩擦係数をそれぞれ μ_0 および μ とする．以後，糸巻きと車輪を合わせて車輪と呼ぶ．このとき以下の問に答えよ.

(1) 車輪について，質量 M と回転軸周りの慣性モーメント I を求めよ.

以後，車輪の質量を M，慣性モーメントを I で表わせ.

(2) 図 1(b) にあるように，糸のない車輪が傾斜角 γ の斜面をすべらずに転がるとき，斜面から受ける摩擦力の大きさを F とし，x と θ に関する運動方程式を示せ．ただし，斜面と平行に下向きを x の正，反時計回りの回転角 θ を車輪の順回転とする.

(3) F を求めよ.

(4) 車輪がすべらないとき，γ，μ_0，R，M および I の間の関係を示せ.

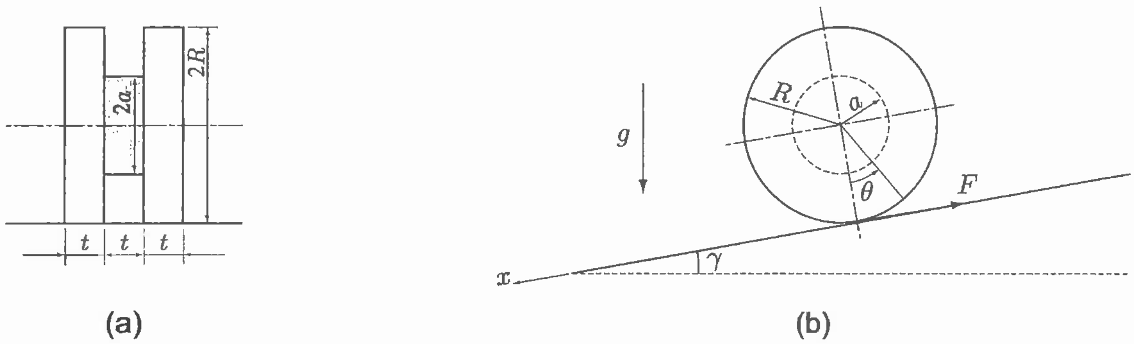

図 1

問題1の続き

次に，図2に示すように，糸巻きの糸に斜面と平行に大きさTの張力が加えられ，車輪が斜面をすべりながら転がり落ちるときの運動について考える．

(5) xとθに関する運動方程式を示せ．

(6) 静止している車輪が斜面をすべりながら転がり落ちるために必要なγ，μ_0およびR/aの間の関係を示せ．

(7) 車輪の位置を一定に保つために必要な張力Tを求めよ．また，そのとき回転する車輪の角速度を求めよ．ただし，初期時刻の角速度を$\omega(0) = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t|_{t=0} = \omega_0 > 0$とする．

(8) (7) で車輪の位置が一定であるとき，回転の角速度$\omega(= \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$を一定とするための条件を求めよ．このとき，初期時刻$t = 0$から時刻$t = \tau$の間に糸が車輪に対して行う仕事を求めよ．

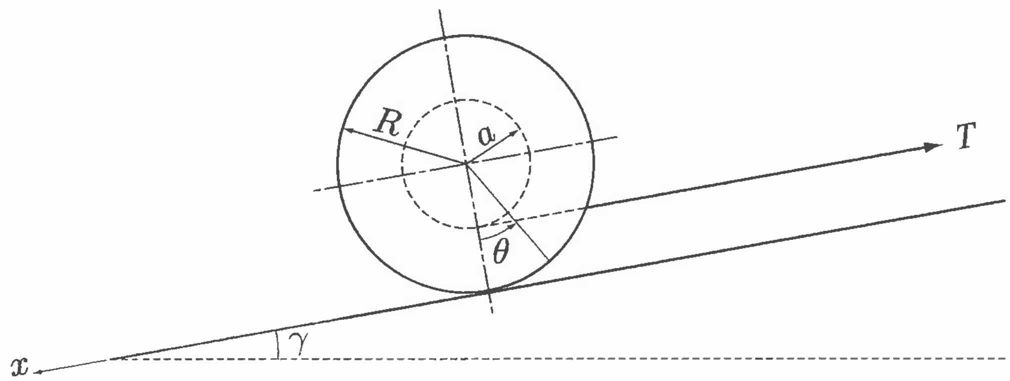

図2

問題２

以下の文章中の(a)～(m)に適切な語句，または数式を入れよ．

非粘性流体の運動に対して，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1}$$

ここで，$\vec{v}$は速度ベクトル，p は圧力，ρは流体の密度，$\vec{F}$ は単位質量あたりの流体に作用する外力，t は時間である．式(1)の左辺第２項は，次のように変形できる．

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\nabla\frac{V^2}{2}-\vec{v}\times\vec{\omega},\quad V=|\vec{v}|,\quad \vec{\omega}=\nabla\times\vec{v} \tag{2}$$

ここで，$\vec{\omega}$は $\boxed{\text{(a)}}$ と呼ばれる量である．流体の密度が圧力のみの関数であると仮定し，$P=\int\rho^{-1}dp$ で定義される関数 P を導入すると，式(1)の右辺第２項を次のように変形できる．

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p=-\nabla P \tag{3}$$

また，外力 $\vec{F}$ が保存力である場合，そのポテンシャルΩを用いて

$$\vec{F}=-\nabla\Omega \tag{4}$$

と表せる．

定常流れの場合には，式(2)，(3)，(4)を用いて式(1)を次のように表すことができる．

$$\nabla\left(\boxed{\text{(b)}}\right)=\vec{v}\times\vec{\omega} \tag{5}$$

式(5)より，$\boxed{\text{(b)}}$ が一定となる曲面の法線ベクトルは，$\vec{v}\times\vec{\omega}$ と平行であり，$\vec{v}$ と $\vec{\omega}$ はともに $\boxed{\text{(b)}}$ が一定の曲面に平行であることがわかる．これより，一つの流線上では $\boxed{\text{(b)}}$ が一定値をとることがわかる．これは $\boxed{\text{(c)}}$ の定理と呼ばれる．

次に，非定常の渦無し流れを考える．渦無し流れでは速度ポテンシャルが存在し，これをΦとすると速度$\vec{v}$を

$$\vec{v}=\boxed{\text{(d)}} \tag{6}$$

と表わせる．式(2)，(3)，(4)，(6)を用いると，式(1)を次のように表わすことができる．

$$\nabla\left(\boxed{\text{(e)}}\right)=0 \tag{7}$$

これより，$\boxed{\text{(e)}}$ は時間 t のみの関数であり，時間 t の任意の関数を$f(t)$とすると

$$\boxed{\text{(e)}}=f(t) \tag{8}$$

と表すことができる．非圧縮性流体を考える場合には，P を p/ρ におきかえることで，式(8)を次のように表わせる．

$$\boxed{\text{(f)}}=f(t) \tag{9}$$

問題２の続き

非定常渦無し流れの一例として，図 1 に示すような断面積が一定の U 字管内での，管軸方向（s 方向）への液体の 1 次元的な運動を考える．液体は，非圧縮，非粘性流体で密度をρとし，液面は大気（大気圧 p_a）に開放され，U 字管の鉛直部に存在するものと仮定する．管軸方向（s 方向）の流速を$V(t)$とすると，速度ポテンシャルΦを

$$\Phi = \boxed{\quad (\mathrm{g}) \quad} \tag{10}$$

と表わすことができる．液体が静止している場合の液面の位置を高さ z の基準（z=0）に選ぶと，外力のポテンシャルΩを重力加速度 g と高さ z を用いて

$$\Omega = \boxed{\quad (\mathrm{h}) \quad} \tag{11}$$

と表わせる．ある時刻 t で，s=s_1における液面の高さを z_1，s=s_2における液面の高さを z_2 とすると，式(9)より液面の加速度を次式で表わせる．

$$\frac{dV(t)}{dt} = \boxed{\quad (\mathrm{i}) \quad} \tag{12}$$

z_1 と z_2 の間には

$$z_1 = \boxed{\quad (\mathrm{j}) \quad} \tag{13}$$

の関係があり，$V(t)$は z_2 を用いると

$$V(t) = \boxed{\quad (\mathrm{k}) \quad} \tag{14}$$

と表わせる．また，液体が存在する部分の管軸方向（s 方向）の長さを L とすると

$$s_2 - s_1 = L \tag{15}$$

である．式(13)，(14)，(15)を式(12)に代入すると，z_2 に関する次の微分方程式が得られる．

$$\boxed{\quad (\mathrm{l}) \quad} = 0 \tag{16}$$

これを解くことにより，液体は周期 $\boxed{\quad (\mathrm{m}) \quad}$ で単振動することがわかる．

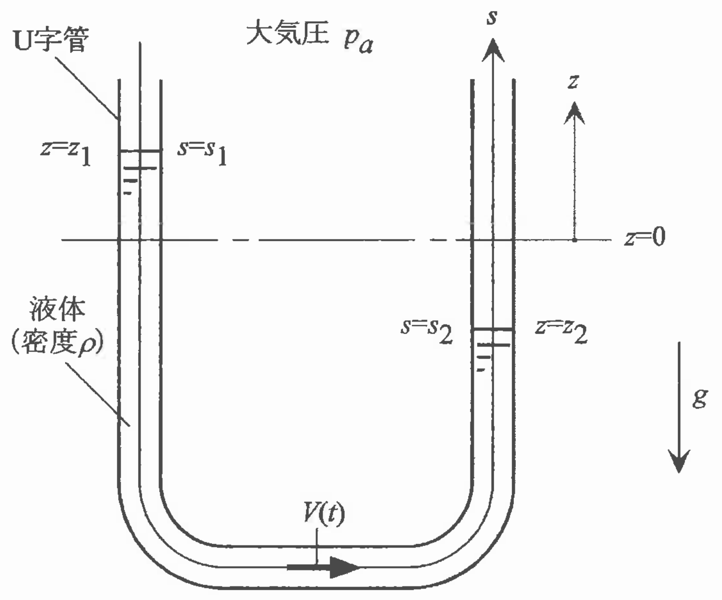

図1

問題 3 (次の（1）,（2）の両方を解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．)

（1）次の二つの常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \lambda r - r^3 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mu - \sin\theta \tag{2}$$

について以下の問に答えよ．ただし，r，θ は t の実関数，λ, μ はパラメータであり，$r > 0$，$-\pi \leq \theta < \pi$ とする．

(a) (1) 式の両辺を r^3 で割ることにより，初期値が $r(0) = r_0\ (> 0)$ で与えられるときの解を求めよ．また，十分大きな t に対して r がどのような値に収束するか述べよ．

(b) (2) 式で $|\mu| \leq 1$ のとき $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$ すなわち $\mu = \sin\theta$ となるような $\theta = \theta^*$ が存在する．いま，$\theta = \theta^* + \tilde{\theta}$ と仮定して，$\tilde{\theta}$ の大きさが十分小さいときの $\tilde{\theta}$ の微分方程式を導け．また，$|\mu| < 1$ の場合，この θ^* は θ_1，θ_2 ($|\theta_1| < |\theta_2|$) の異なる二つの値をとる．初期値 $\theta(0) = \theta_0$ がこの θ_1 または θ_2 の近傍にあるとき，t が増加するとともに θ はどのように変化するか述べよ．

(c) 極座標 (r, θ) で表される平面上の点 $P(r, \theta)$ の移動が (1), (2) 式で記述されるとする．$\lambda = 1$, $\mu = 1/\sqrt{2}$ の場合，t の増加とともに点 P の移動する様子が，初期位置 (r_0, θ_0) に対してどのように異なるか述べ，その概略を図示せよ．

（2）実対称行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，$a_{11} \neq a_{22}$, $a_{12} \neq 0$.

(a) 行列 $\boldsymbol{A}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ とがつくる二次形式 $x = \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}$ は，単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の選び方に依存する．この x が極値（極大値あるいは極小値）となるときの，θ についての条件を示せ．なお，$()^T$ は転置を表す．

(b) 行列 $\boldsymbol{A}$ が，単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ およびそれに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{m}$ とでつくる双一次形式 $y = \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}$ が極値となるときの，θ の条件を示せ．

(c) 問 (a) で求めた x を極値とする $\theta = \theta_x$ と，問 (b) で求めた y を極値とする $\theta = \theta_y$ との間の関係を示せ．

(d) 横軸に $x = \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}$，縦軸に $y = \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}$ をとるとき，任意の θ について，(x, y) はどのような図形となるかを示せ．