平成２２年度大阪大学大学院基礎工学研究科博士前期課程（一般）入学試験

機械科学Ｉ

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には,「問題１（２枚目)」などのように記入せよ.）

問題 1

（次の（１)，(２）の両方を解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．）

（１）行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ：

(a) A の固有値 λ を求め，各固有値に対して行列 $(A-\lambda I)$ の階数 (rank) を調べよ．ただし，I は単位行列である．

(b) 各固有値に対する固有ベクトルを正規直交系をなすように選び，これを示せ．また，この固有ベクトルを用いて直交行列 L を求め A を対角化せよ．

(c) 変数 x に対する A の固有多項式 $f(x)=\det(A-xI)$ において，$f(A)=\mathbf{0}$ となることを用いると

$$A^3 + aA^2 + bA + cI = \mathbf{0}$$

のようにかける．行列 A の固有値を λ_1，λ_2，λ_3 (重複を含む) とおいて，これらを用いて係数 a，b，c を表せ．ただし，det は行列式をとることを意味し，$\mathbf{0}$ は零行列である．

(d) 前問で得られた関係を用いて

$$A^4 + A^3 - 3A^2 - 6A - 3I$$

の値を求めよ．

（２）パラメータ ϵ (>0) を伴う関数 u の x に関する微分方程式

$$\epsilon \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = x \qquad (1)$$

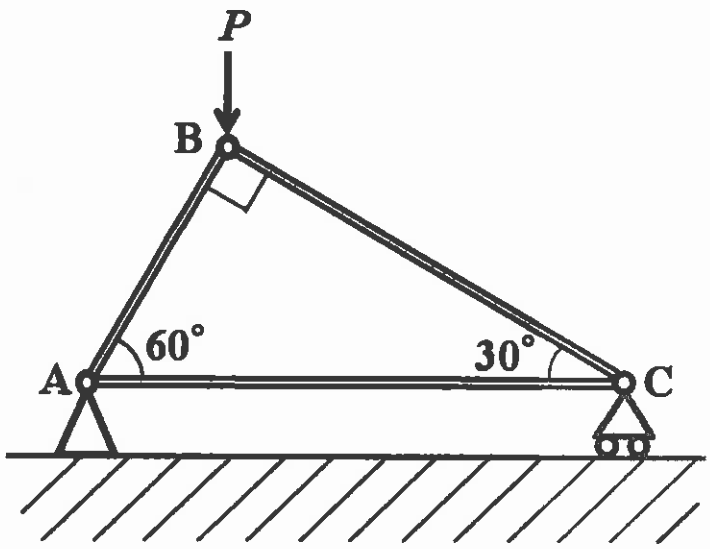
を境界条件 $u(0)=1$ のもとで解く．ただし，$x \geq 0$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(a) この方程式の厳密解を求め，解の概略を図示せよ．また，u の最小値とそれを与える x を調べ，ϵ が十分小さくなるときの解の特徴的な振る舞いについて述べよ．

(b) ϵ が十分小さい場合，この方程式の近似解について考える．まず，式 (1) で $\epsilon=0$ とおいて得られる解を u_1 とする．次に，式 (1) に変数変換 $y=x/\epsilon$ を用いて y に関する新たな微分方程式を求め，この方程式で $\epsilon=0$ とおいて得られる解を u_2 とする．このとき，u_1 および u_2 を厳密解と比較することにより，各々の解が式 (1) の近似解として x のどのような領域で有効であるか述べよ．

(c) $x \geq 0$ の全領域で有効な近似解 u_0 を上で得られた二つの近似解 u_1, u_2 を用いて表し，厳密解からのずれ $|u-u_0|$ の程度を評価せよ．

問題２



上図に示すように，丸棒部材 AB，BC，および AC から構成されるトラス（各節点において部材の回転は拘束されない）の点 B に鉛直方向下向きに荷重 P が作用している．支持点 A は移動することができないが，支持点 C は水平方向に摩擦をともなわずに移動することができる．部材 AB の長さと断面積をそれぞれ L と A とする．部材 BC および AC の断面積はそれぞれ A のα倍およびβ倍とする．部材 AC の引張り降伏応力をσ_Yとする．すべての部材のヤング率を E とする．重力の影響は無視する．以下の設問に答えよ．

(1) 部材 AB，BC，AC に作用する軸力 P_1，P_2，P_3を求めよ．

(2) 各部材が座屈も降伏も起さないとき，点 B の垂直方向の変位δ_vと水平方向の変位δ_uをそれぞれ P，E，L，A，α，βにより表せ．

(3) α=1 の場合を考える．荷重 P を増加すると $P=P^*$において座屈が生じた． P^*を E，L，A により表せ．また，このときどの部材が座屈したかを示せ．

(4) 部材 AB と BC が同時に座屈し，かつ，部材 AC が降伏するとき，αの値を求めよ．また，このときのβを E，L，A，σ_Yにより表せ．

問題３

図１に示すように，左端の広い空間から水平に置かれた半径 R の円管内に流体が流入し，円管内を流れる場合を考える．円管の中心軸を x 軸とし，x 軸に垂直な方向に半径方向座標 r をとる．流れは非圧縮性，定常，軸対称流れであり，また管軸を中心とする旋回速度成分を持たない層流と仮定する．助走区間下流部の完全に発達した流れでは，流速は x 方向成分 $u(r)$のみを持ち，x 軸に垂直な断面で圧力は一様である．流体の密度を ρ，粘性係数をμとし，以下の設問に答えよ．

(1) 助走区間では流れが徐々に発達する．物体表面で流体が付着，静止する影響が現れる層の名称を答えよ．

(2) 完全に発達した流れの中に示された，軸方向長さ dx，半径 r の円柱形状の検査体積の表面に作用する圧力 p による x 方向の力を記せ．

(3) x 方向の流速 $u(r)$を用いて，ニュートンの粘性法則に基づくせん断応力 τ の大きさを示せ．ただし，せん断応力が壁面からの距離に対する速度勾配に比例するという点に注意せよ．

(4) 完全に発達した定常流れでは，検査体積表面に働く圧力による力とせん断応力による力は釣り合う．これらの力の釣り合い式を示せ．

(5) 流速 $u(r)$を求めよ．

(6) 完全に発達した流れの圧力は，流れの向きに一定の割合で減少する．圧力が減少することによって圧力が流体にする仕事は流れの向きに減少する．この仕事の減少によって流体に注入されたエネルギーは流れの中でどうなるのか簡潔に述べよ．

(7) 円管内の最大流速 u_0 を求めよ．また，流量ならびに円管内の平均流速 $\bar{u}$ を求めよ．さらに u_0 と $\bar{u}$ の関係を示せ．

(8) 完全に発達した流れが存在する区間の長さを l，その区間内の圧力損失を Δp とすると，圧力損失は平均流速 $\bar{u}$ を用いて次のように表わされる．

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{2R} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}$$

このとき，管摩擦係数と呼ばれる λ を求めよ．ただし，レイノルズ数 $\mathrm{Re} \equiv 2\rho \bar{u} R / \mu$ を用いて示せ．

(9) 図２に示すように，上部が大気へ開放された貯液槽の側壁に上述の円管を水平に取り付けた場合を考える．このとき貯液槽内の液体は円管の右端から大気中に流出する．円管の長さを L，管摩擦係数を λ，入口損失係数を ζ とし，円管内の流れは十分に発達した層流と仮定する．貯液槽内の液面の表面積は大きく，円管の軸から貯液槽内の液面までの高さ H の減少が無視できる場合，円管の右端から流出する液体の円管出口における平均流速 U を示せ．ただし，重力加速度を g とする．

(10) レイノルズ数が約 2300 を超えると，層流は乱流に遷移し，発生した渦による速度変動が原因となるせん断応力が生じ，層流に比べてせん断応力が大きくなる．乱流の速度変動によって生じるせん断応力の名称を答えよ．

問題３の続き

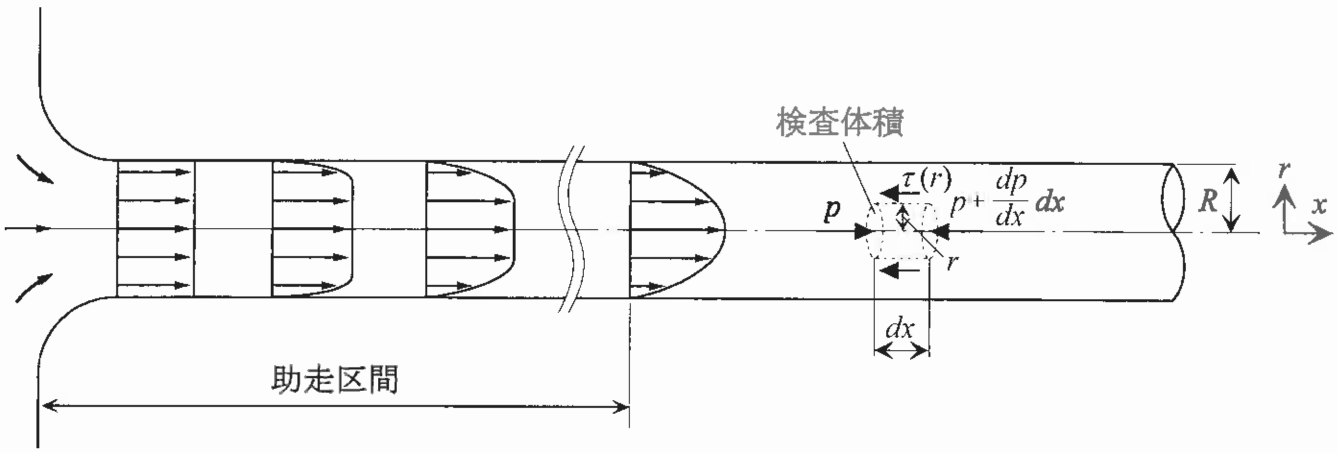


図1

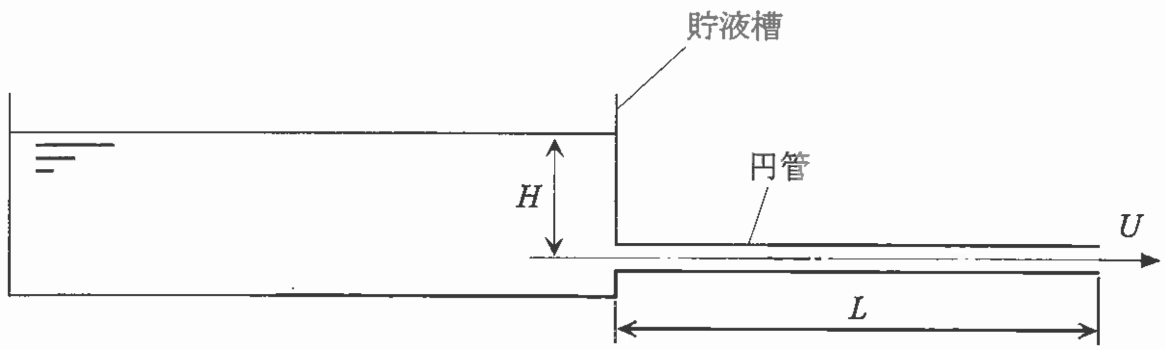


図2