

機械科学Ⅱ

（問題1から問題3の全てに解答し、それぞれ別の答案用紙に記入せよ。各問題に2枚以上の答案用紙を用いる場合には、「問題1（2枚目）」などのように記入せよ。なお、問題3については(1)、(2)のうちから1問を選択し答案用紙に解答せよ。）

問題1

半径 R の真直ぐで等方均質な丸棒がねじりモーメント（トルク） T を受けている（図1）。ねじり変形の際に、棒の断面は平面を保ちながらその中心周りに回転することを仮定する。この材料のヤング率（縦弾性係数）と剛性率（せん断弾性係数）をそれぞれ E と G とする。以下の設問に全て答えよ。解答だけでなく導出過程も示せ。

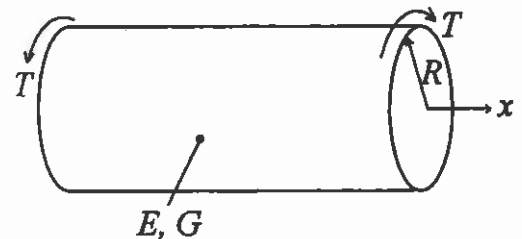


図1

- (1) 中心から半径 r の位置において発生するせん断応力 $\tau(r)$ が

$$\tau(r) = Gr\theta$$

と表されることを示せ。ただし、 θ は単位長さあたりのねじれ角（ $\theta = d\phi/dx$ ）である。 $d\phi$ は微小円柱要素の弾性変形により発生したねじれ角である。（図2参照）。

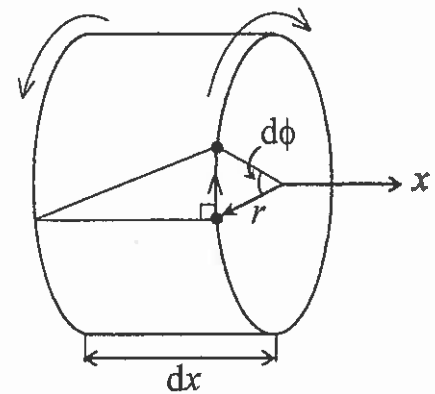


図2

- (2) $\tau(r)$ に起因する軸回りのモーメントを断面内において積分することにより、ねじりモーメント T を G 、 R 、 θ によって表せ。
- (3) 軸方向に変形の拘束が無いとき、丸棒はねじり変形とともにわずかに軸方向に縮む。一方、軸方向の変形を拘束するとき（つまり、棒の軸方向長さが不変のねじり変形を行うとき）、断面内には軸方向の垂直応力が発生し、また、見かけのねじり剛性が増加する。このことを以下の手順にしたがって考察する。ただし、微小変形（ $\theta \ll 1$ ）を仮定し、 θ^2 の項までを考慮する近似を用いる。

問題1の続き

- (a) 図3に示すように、半径 r の位置にある軸方向の線要素 AB （長さ dx ）を考える。軸方向長さ不変のねじり変形によって、点 B は円周上の点 B' に移動し線要素 AB は AB' と伸びる。つまり、線分 AB' がこの方向の垂直応力 σ により伸びている。この伸びを考えると、 σ は近似的に

$$\sigma = \frac{E}{2}(r\theta)^2$$

と表されることを示せ。

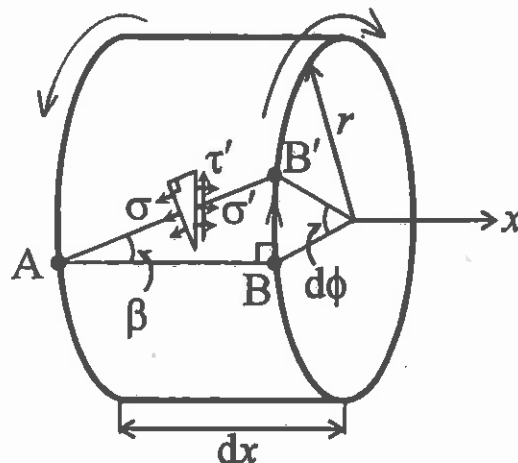


図3

- (b) 図3中の微小三角形要素の力の釣り合いから、 σ に伴って発生する軸方向の垂直応力 σ' と軸方向に垂直な断面内のせん断応力 τ' は、近似的に以下のように表せることを示せ。ただし、微小変形では $\angle BAB' = \beta = r\theta$ である。

$$\begin{aligned} \sigma' &= (1 - (r\theta)^2)\sigma, \\ \tau' &= r\theta\sigma \end{aligned}$$

- (c) このとき、 τ' が作るモーメントを断面にわたって積分することにより、付加的なモーメント T' を E 、 R 、 θ によって表せ。
- (d) 丸棒の両端に剛体壁を接続して軸方向の長さが不変であるねじり変形を実現したとき、固定端から棒に加わる引張り軸力 P' を E 、 R 、 θ によって表せ。

以上のように、軸方向の変形を拘束したことにより、モーメント T' が発生し見かけのねじり剛性が増加する。その増加率および棒に生じる軸力 P' はともに θ^2 に比例する量であるが、厳密な応力計算を行う場合には考慮する必要がある。

以上

問題2

次の(1), (2)の両方を解答し, それぞれ別の答案用紙に記入せよ.

- (1) 滑らかに動かせるピストンで密封されたシリンダ内の理想気体に関する以下の問に答えよ. ただし, 熱の授受はシリンダとその内の気体との間でのみなされ, ピストンとシリンダは剛体と見なせるものとする. 理想気体の質量を m , 定積比熱を c_v , 定圧比熱を c_p とし, シリンダの質量を M , 比熱を c とする. 比熱 c_v , c_p , c は一定であるものとする.
- (a) ピストンはある位置で固定されている. 気体とシリンダの初期温度はそれぞれ T_1 , T_2 であった. 十分時間が経過すると, 気体とシリンダは熱平衡に達し両者の温度は等しくなった. その際の気体とシリンダの温度を求めよ.
- (b) 問(a)の最終状態において, ピストンの固定を解除して, シリンダと気体の温度が等しく保たれるようゆっくりピストンを動かした. この状態変化では, 気体の圧力 p と体積 V との間に $pV^n = \text{一定}$ (n は定数) なる関係が成り立つ. 定数 n を求めよ. ただし, m , M , c_v , c_p , c のうち必要なものを用いて表すこと. また, $Mc \ll mc_v$ あるいは $Mc \gg mc_p$ の各場合において, 気体は近似的にどのような状態変化をすると見なせるか答えよ.
- (c) 問(a)の気体の体積を V_a , 問(b)の最終状態における気体の体積を V_b とする. 問(b)の状態変化の初め ($V=V_a$) と終わり ($V=V_b$) の状態間での気体のエントロピー変化およびシリンダのエントロピー変化を求めよ. ただし, m , M , c_v , c_p , c , V_a , V_b , n のうち必要なものを用いて表すこと. また, 問(b)における気体とシリンダからなる系の状態変化は可逆か不可逆かを記し, その理由を簡潔に述べよ.
- (2) 内半径 r_i , 外半径 r_o , 熱伝導率 k の保温材でできた円管内を温度 T_i の温水が流れている. 保温材内側表面の熱伝達率を h_i , 外側表面の熱伝達率および周囲流体温度をそれぞれ h_o , T_o ($T_o < T_i$) として以下の問に答えよ. ただし, 保温材内の温度は半径方向 r のみに依存し, 定常次元問題として扱えるものとする.
- (a) 保温材内の温度 $T(r)$ を支配する微分方程式を導き, その一般解を示せ.
- (b) 温水から周囲流体への単位時間, 管軸方向単位長さ当たりの熱損失 Q_1 を求めよ.
- (c) 温水からの熱損失を防ぐため, 保温材外側表面に厚さの無視できる薄膜ヒータを貼り付け, その面全体を一様に加熱する. 温水からの熱損失がゼロとなるのに必要な単位時間, 管軸方向単位長さ当たりのヒータ発熱量 Q_2 を求めよ.
- (d) 問(c)と同様の薄膜ヒータを今度は保温材外側表面ではなく内側表面に貼り付け, その面全体を一様に加熱する. この状態で温水からの熱損失がゼロとなるのに必要な単位時間, 管軸方向単位長さ当たりのヒータ発熱量を Q_3 とするとき, $Q_1 < Q_3 < Q_2$ となることを説明せよ.

問題3

次の(1)、(2)から1問を選択して答案用紙に記入せよ。

(1) 図1に示すような平歯車列による単段減速倍力機構を考える。この単段の機構では、力は図のようにクランク端→歯車1→歯車2→巻胴→ロープのように伝達される。歯車1のピッチ円直径 d_1 、歯車2のピッチ円直径 d_2 、巻胴直径 d_3 、クランク長さ R 、作用力 H 、巻き上げ荷重 Q として、次の間に答えよ。なお、歯車1、歯車2はいずれも圧力角 α のインボリュート歯形を持つ標準平歯車であり、動力の伝達効率は100(%)とする。

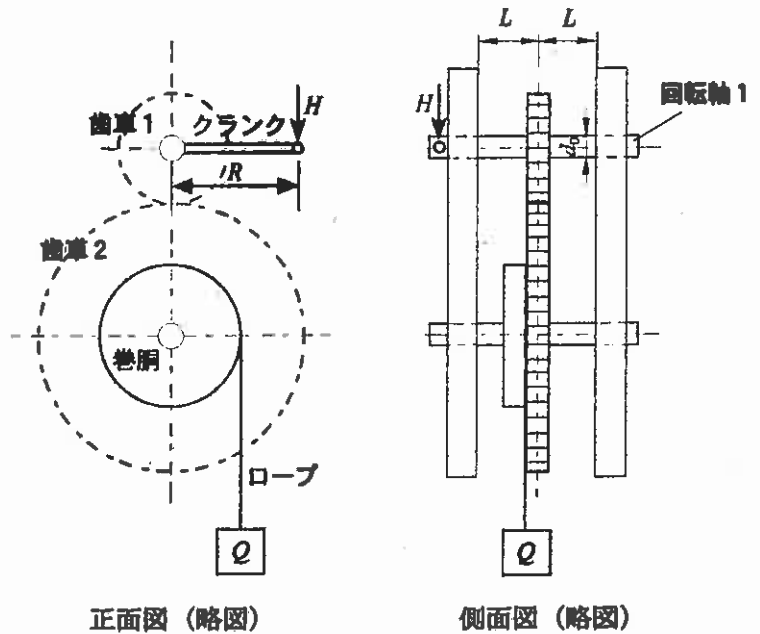


図1

(a) 歯車1の歯数を Z_1 とするとき、歯車1のモジュール m_1 はどのように表されるか答えよ。

(b) モーメントの釣り合いを考慮して、歯車1と歯車2の間の減速比(歯数比)を H, R, Q, d_3 を用いて表せ。

(c) 歯車1と歯車2のかみ合いによって生じる力 F とその歯車接線成分 F_T と歯車半径成分 F_R の大きさをそれぞれ答えよ。

(d) 平歯車に要求される歯の強さはピッチ円の接線方向に作用する伝達力 F_T (N) から次式で計算される。

$$F_T \leq f_v \sigma_b B m y$$

ここで、 f_v : 速度係数、 σ_b : 歯車材料の許容曲げ応力 (MPa)、 B : 歯幅 (mm)、 m : モジュール (mm)、 y : 歯形係数である。歯車1が表1の諸元を持つとき、歯車1の材料として適するものを表2の中から選び、その理由を簡単に説明せよ。なお、速度係数 f_v は0.75、作用力 H は150(N)、クランク長さ R は300(mm)とする。

表1

ピッチ円直径 d_1 (mm)	76
モジュール m_1 (mm)	2
圧力角 α (deg.)	20
歯幅 B (mm)	12
歯形係数 y	0.4

表2

種別	記号	許容曲げ応力 σ_b (MPa)
鋳鉄	FC200	70
	FC300	110
鋳鋼	SC410	120
炭素鋼	S25C	210
	S45C	300
Ni-Cr鋼	SNC1	350

(e) 支点間長さ $2L$ 、軸直径 d_0 の歯車1を支える中実の回転軸1には、歯車同士のかみ合いにより、ねじりモーメントと曲げモーメントの組合せ荷重が作用する。この回転軸1に加わる最大せん断応力 τ_{max} を求めよ。ただし、歯車1の自重、歯幅の影響は無視して良い。

- (2) 異なる重量 x_i (kgw) の重りをバネに吊り下げ, その長さ y_i (mm) を測定した ($i=0, 1, 2, \dots, N-1$). バネの長さ y と重量 x とを, 関数 $y=f(x)=a_0f_0(x)+a_1f_1(x)+\dots+a_{M-1}f_{M-1}(x)$ ($M < N$) に当てはめ, その関係を最小二乗法により調べる. すなわち,

$$E = \sum_{i=0}^{N-1} |y_i - f(x_i)|^2$$

を最も小さくするパラメータ a_0, a_1, \dots, a_{M-1} の値 (最適値) を求める. 以下の問いに答えよ.

ただし, 関数のパラメータを表すベクトルを $'a = \{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$, 測定結果を表すベクトルを $'y = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$, 行列 A を

$$'A = \begin{pmatrix} f_0(x_0) & f_0(x_1) & \dots & f_0(x_{N-1}) \\ f_1(x_0) & f_1(x_1) & \dots & f_1(x_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M-1}(x_0) & f_{M-1}(x_1) & \dots & f_{M-1}(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

とする. なお, $'()$ は転置を表す.

- (a) パラメータ a の最適値は $('AA)'a = 'A y$ を満たすことを示せ.

- (b) 測定により,

i	0	1	2	3	4
x_i (kgw)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i (mm)	52	98	150	260	340

が得られた. 関数を $f(x) = a_0 + a_1x$ としたとき, a_0, a_1 の最適値を求めよ.

また, $f(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2\{(x-2)^2 - 2\}$ としたとき, a_0, a_1, a_2 の最適値を求めよ.

- (c) $\sum_{i=0}^{N-1} f_j(x_i)f_k(x_i) = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$ となるような場合, パラメータ a の最適値が容易に求まる. こ

の理由を述べよ.

- (d) 以下は, $f(x)$ が $M-1$ 次の多項式 ($f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{M-1}x^{M-1}$) のときに, 最適なパラメータを算出するプログラムである. ア から オ に当てはまる語句, 数値を示せ. なお簡単のため, エラー処理, 収束性の吟味等は行っていない.

また, 連立一次方程式

$$\begin{cases} C_{0,0}a_0 + C_{0,1}a_1 + \dots + C_{0,M-1}a_{M-1} = D_0 \\ \vdots \\ C_{i,0}a_0 + C_{i,1}a_1 + \dots + C_{i,M-1}a_{M-1} = D_i \\ \vdots \\ C_{M-1,0}a_0 + C_{M-1,1}a_1 + \dots + C_{M-1,M-1}a_{M-1} = D_{M-1} \end{cases}$$

の解は、適当な初期値 $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_{M-1}^{(0)}$ から、

$$a_i^{(k+1)} = \frac{1}{C_{i,i}} \left(D_i - \sum_{j=0}^{i-1} C_{i,j} a_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{M-1} C_{i,j} a_j^{(k)} \right)$$

による反復で求める (Gauss-Seidel法)。解の収束判定条件は、小さな正数 ε を用いて

$$\sum_{i=0}^{M-1} |a_i^{(k+1)} - a_i^{(k)}| < \varepsilon \sum_{i=0}^{M-1} |a_i^{(k+1)}|$$

としている。ここで、 $a_i^{(k)}$ は、 k 回の反復によって得られた、解 a_i の近似値を表す。

— プログラム —

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

#define N 5          /* 測定数(重りの数) */
#define M 3          /* パラメータの数 */
#define EPS 1.0E-10 /* 収束判定用の正数 */

void func(double x, double m[], int n);

/* m[]=[1, x, ..., x^(n-1)] を算出 */
void func(double x, double m[], int n)
{
    int i, j;

    for(i=0; i<n; i++){
        m[i] = ア;
        for(j=0; j<i; j++){
            m[i] += x;
        }
    }
}

int main(void)
{
    double x[N] = {0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0};
    double y[N] = {52.0, 98.0, 150.0, 260.0, 340.0};
    double A[N][M];

    /* A の転置行列と A の積を格納する配列 */
    double tA_A[M][M];

    /* A の転置行列と y の積を格納する配列 */
    double tA_y[M];

    /* 最適パラメータが格納される配列 */
    double a[M];

    double sum, err, ai;
    int i, j, k;

    /* 行列 A の作成 */
    for(i=0; i<N; i++){
        func(x[i], A[i], M);
```

```
/* 行列 tA_A の作成 */
for(i=0; i<M; i++){
    for(j=0; j<M; j++){
        tA_A[i][j] = イ;
        for(k=0; k<N; k++){
            tA_A[i][j] += ウ;
        }
    }
}

/* 行列 tA_y の作成 */
for(i=0; i<M; i++){
    tA_y[i] = エ;
    for(j=0; j<N; j++){
        tA_y[i] += A[j][i]*y[j];
    }
}

/* Gauss-Seidel 法 による連立一次方程式の計算 */
for(i=0; i<M; i++){
    a[i]=0.0; /* 初期値の設定 */
}

while(1){
    err = sum = オ;
    for(i=0; i<M; i++){
        ai = tA_y[i];
        for(j=0; j<i; j++){
            ai -= カ;
        }
        for(j=i+1; j<M; j++){
            ai -= tA_A[i][j]*a[j];
        }
        ai /= tA_A[i][i];
        err += fabs(ai-a[i]); /* fabs は絶対値を返す */
        sum += fabs(ai);
        a[i] = キ;
    }
    if(err<EPS*sum) /* 収束の判定 */
        break;
}

/* 結果の表示 */
printf("a = [ %f", a[0]);
for(i=1; i<M; i++){
    printf(", %f", a[i]);
}
printf(" ]\n");

return 0;
}
```