機 械 科 学 I

（問題１から問題３のすべてを解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．
各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合は,「問題１（２枚目）」などのように記入せよ.）

問題 1 (小問（１），（２）の両問に答えよ)

（１）常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - y - 1 = 0 \tag{1}$$

において境界条件

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

を満たす解を考える．以下の問いに答えよ．

(a) この方程式の厳密解を求め，その概略図を描け．

(b) 境界条件 (2) を満たす $y(x)$ の汎関数 $I[y(x)]$ を，α, β を定数として以下のように与える：

$$I[y(x)] = \int_0^1 [\alpha(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + \beta y^2 + y]\mathrm{d}x \tag{3}$$

いま微分可能な任意関数 $\epsilon\eta(x)$（ϵ は x によらないパラメータ）を用いて得られる変分 $\delta I \equiv I[y+\epsilon\eta] - I[y]$ を考える．ただし，$\eta(0) = \eta(1) = 0$ を満たすとする．この δI が停留値をとる，すなわち $\left.\frac{\partial\,\delta I}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$ となる $y(x)$ の微分方程式が (1) 式と一致するように α, β を決定せよ．

(c) このような $y(x)$ が汎関数 I を最小にすることを示せ．

(d) 境界条件 (2) を満たす (1) 式の近似解として

$$y = cx(x-1) \tag{4}$$

を考え，(4) 式が汎関数 I を最小にするように定数 c を決定せよ．さらに，そのようにして得られた近似解と (1) 式の厳密解とを $x = 0.5$ での値を求めて比較せよ．ただし，$e = 2.72$, $\sqrt{e} = 1.65$ を用いよ．

問題 １の続き

（２）行列$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}$について以下の問いに答えよ.

(a) 固有値および固有ベクトルを求めよ.

(b) $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列P を求めよ .

(c) x_n と y_n の連立差分方程式

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

を初期条件

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$$

のもとで解け.

(d) $x(t)$ と $y(t)$ の連立常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

を初期条件

$$\begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$$

のもとで解け.

(e) 行列Aが対称行列A_Eと反対称行列A_Oの和で表せることを利用して，曲線

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=1$$

と原点との最短距離を求めよ.

問題２

図１に示すように，x 方向の速度が U の一様な流れの中に半径が１の円筒が置かれた場合を考える．円筒周りの流れを，非圧縮，非粘性流体の x-y 平面内における２次元流れと仮定し，以下の設問に答えよ．ただし，流体の密度を ρ とする．

(1) 図１に示す円筒まわりの流れの複素ポテンシャル f は，次式で与えられることを示せ．

$$f = U\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

ここで，$z = x + iy$ である．

(2) 円筒表面の周方向速度 v_θ を求めよ．

(3) 円筒表面で流速の大きさが最大となる周方向位置 θ と最大流速の大きさを求めよ．

(4) 円筒表面の圧力分布を求めよ．ただし，無限遠方の圧力は p_∞ で一定であると仮定する．

(5) 円筒の $y \geq 0$ の部分（紙面に垂直な方向の長さは単位長さ）に働く x, y 方向の流体力を求めよ．ただし，円筒内部の圧力は p_∞ で一定であると仮定する．

(6) 円筒の壁面に小さな穴をあけると，円筒内部の圧力が穴の位置の外部の圧力と等しくなると仮定する．円筒の $y \geq 0$ の部分（紙面に垂直な方向の長さは単位長さ）が受ける y 方向の力が０になる穴の設置角度 θ を求めよ．

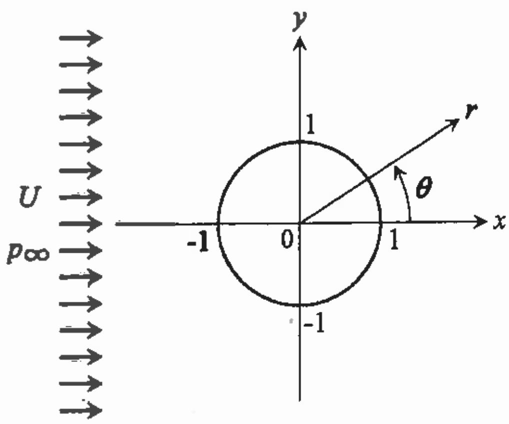

図1

次に，流体に粘性があり，円筒の下流の速度分布が図２に示すような非一様な速度分布になる場合を考える．以下の設問に答えよ．

(7) 図２に破線で示す検査体積 ABCD に対して，運動量保存の法則，ならびに連続の式を適用して，円筒の $y \geq 0$ の部分（紙面に垂直な方向の長さは単位長さ）に働く x 方向の力を求めよ．ただし，検査面 CD 上の速度 u は

$$u(y) = U - \Delta U \cos\frac{\pi}{b}y \qquad \left(-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}\right)$$

$$u(y) = U \qquad \left(y < -\frac{b}{2},\ y > \frac{b}{2}\right)$$

で与えられる．b は後流の幅，$\Delta U (< U)$ は速度欠損の最大値である．検査面 AD と BC から流出する流体の x 方向速度成分は U に等しく，検査面 AB, BC, CD, DA 上の圧力は p_∞ で一定であると仮定する．

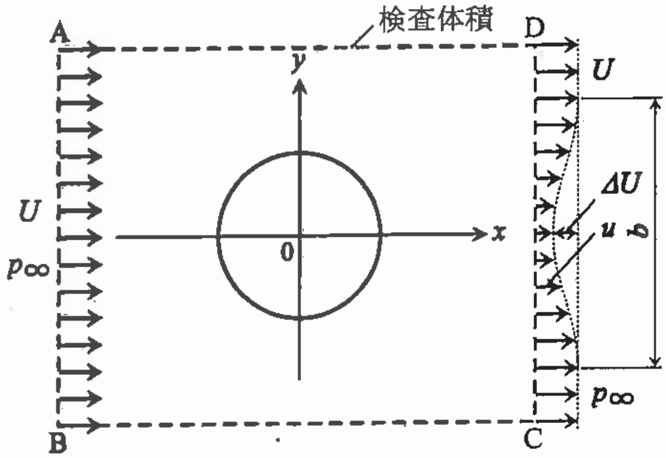

図2

問題3

(1) 図1に示すように，質量の等しい3個の質点が両端を固定した張力Tの弦によって等間隔に結ばれている．このとき，各質点の紙面内の微小横振動について調べる．各質点の質量をm，間隔をl，変位をu_1, u_2, u_3とし，質点の運動に対する重力の影響は考えないものとする．また，弦の質量は無視できるものとし，弦の伸縮による張力Tの変化は考えないものとする．

(a) 各質点の運動方程式を導出せよ．

(b) 運動方程式を解き，固有角振動数を求めよ．

(c) 各固有振動の振動モードを図示せよ．振幅比を明確にすること．

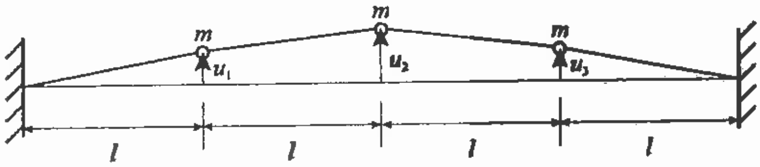

図1

(2) 次に，質量の等しいn個の質点が両端を固定した張力Tおよび全長Lの弦によって等間隔Δxで結ばれているものとする．このとき，問(1)と同様にして質点の微小振動について考える．

(a) i番目$(1 \leq i \leq n)$の質点の運動を考えることにより，$n \to \infty$すなわち$\Delta x \to 0$の極限における運動方程式を示せ．

(b) 質点の数がn個のとき，固有角振動数は以下のように書ける．

$$\omega_n(k) = 2\sqrt{\frac{T}{m\Delta x}}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

このとき，$n \to \infty$の極限における固有角振動数$\omega_\infty(k)$を示せ．ただし，kは有限であるものとし，弦の全長は$L = (n+1)\Delta x$，線密度は$\rho \equiv nm/L$と書ける．