

機械科学Ⅱ

(問題 1～問題 3 の全てに解答し、それぞれ別の答案用紙に記入せよ。各問題に 2 枚以上の答案用紙を用いる場合には、「問題 1 (2 枚目)」などのように記入せよ。なお、問題 3 については(1), (2)のうちから 1 問を選択し答案用紙に解答せよ。)

問題 1

鋼を 850℃付近から急冷すると、マルテンサイト変態という組織変化が起こり、硬度が上昇し体積が増加する。これを焼入れ処理という。焼入れ処理により、部材表面に圧縮の残留応力を導入し、部材の疲労寿命を延ばすことができる。細長い角柱の下部に焼入れ処理を施すと、図 1 に示すように焼入れ部は膨張するため急冷後は反り返る。角柱棒の中央部付近における反り返りの曲率半径と焼入れ部に生じる残留応力を以下に示す簡単なモデルを用いて計算してみる。

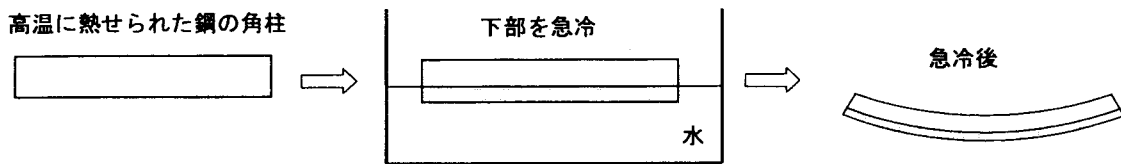


図 1

角柱を焼入れ部と未焼入れ部の 2 つの長方形断面棒の結合体とみなし、未焼入れ部にはマルテンサイト変態による体積変化が生じないとする。焼入れ部の断面の高さを h 、未焼入れ部のそれを $5h$ とし、断面の幅はともに b とする (図 2 参照)。熱収縮を無視し、全体の変形が焼入れ部の体積増加だけによって引き起こされるとする。ヤング率はともに E とする。

変形が拘束されないとき、焼入れ部の長手方向のひずみは $\frac{\epsilon_v}{3}$ である。ここで ϵ_v はマルテンサイト変態による体積増加率を表す。しかし、実際には未焼入れ部と結合しているため変形は拘束され、未焼入れ部

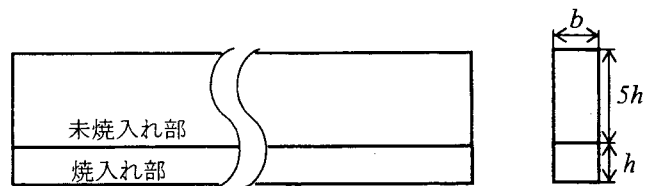


図 2

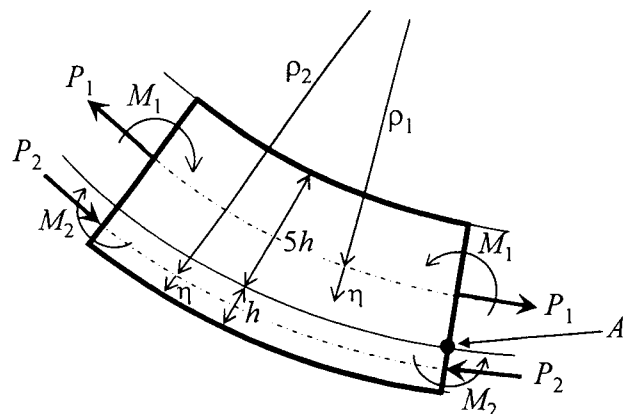


図 3 部材中央部付近の微小要素が受ける軸力とモーメント

問題 1 の続き

には引張りの軸力 P_1 が、焼入れ部には圧縮の軸力 P_2 がそれぞれ発生する。さらに、発生する応力を一部開放するように、曲げモーメント M_1, M_2 がそれぞれ生じ、部材は反り返る。中央部付近における未焼入れ部と焼入れ部の反り返りの曲率半径をそれぞれ ρ_1, ρ_2 とする (図 3 参照)。(断面の幅方向の変形量は小さいため、幅方向の変形の拘束の影響は無視する。) 長手方向の力の釣り合いから $P_1=P_2$ が得られ、これらをともに P とする。以下の設問 (1)~(8) に答えよ (導出過程も詳しく示すこと)。

(1) 図 3 の断面内の A 点まわりのモーメントの釣り合い式を示せ。

M_1 と M_2 は、 E とそれぞれの部材の断面中心を通る軸まわりの断面 2 次モーメント I_1, I_2 および ρ_1 と ρ_2 を用いて、 $M_1=EI_1/\rho_1$, $M_2=EI_2/\rho_2$ と書くことができる。

(2) P を b, h, ρ_1, ρ_2, E によって表せ。

ところで、一般に、曲げモーメントを受けてたわむはりにおいて、中立面から面に垂直方向に η だけ離れた点のひずみは、たわみの曲率半径 ρ により η/ρ と表すことができる。

(3) この関係を証明せよ。

未焼入れ部は引張りの軸力 P と曲げモーメント M_1 によって変形し、焼入れ部は圧縮の軸力 P と曲げモーメント M_2 、さらにマルテンサイト変態による体積変化によって変形する。

(4) このとき両者の接触部のひずみは等しくなければならないことを式で表せ。

(5) 曲率半径 ρ_1 と ρ_2 は h に比べて十分大きいいため、両者ともに等しく ρ とおくことができる。このとき、曲率 $1/\rho$ を ε_v と h だけで表せ

(6) 焼入れ部の最下面に働く応力 (軸応力と曲げ応力の和) を E と ε_v によって表せ。

(7) $\varepsilon_v=0.01$, $E=200$ GPa, $h=5$ mm のとき、曲率半径 ρ を計算せよ。

(8) $\varepsilon_v=0.01$, $E=200$ GPa, $h=5$ mm のとき、焼入れ部の最下面に発生する残留応力を計算せよ。

問題 2

図 1 に示すように、半径 r_1 の円柱が、内半径が r_2 の静止円筒の中で、中心軸周りに角速度 ω で回転する場合を考える。円柱と円筒の中心軸は同一 (z 軸) であり、また軸方向の長さ (紙面に垂直な方向の長さ) は無限大であると考え。円柱と円筒の間には粘性係数 μ の非圧縮性の流体が満たされている。円柱の回転により、流体は円柱の回転方向と同方向 (周方向 (θ 方向)) に流れている。流れは定常状態にあり、層流であると仮定する。また、周方向 (θ 方向) と回転軸方向 (z 軸方向) には物理量の変化が無く、半径方向速度 v_r 、および軸方向速度 v_z を 0 と仮定する。以下の問いに答えよ。なお、円筒座標系におけるナビエ・ストークス方程式は次のように表される。

【円筒座標系におけるナビエ・ストークス方程式】

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\}$$

ここで、 ρ は密度、 p は圧力、 t は時間、 v_r 、 v_θ 、 v_z はそれぞれ半径方向速度、周方向速度、軸方向速度である。また、 F_r 、 F_θ 、 F_z は単位体積あたりの外力であり、本問題では $F_r = F_\theta = F_z = 0$ と仮定する。

- (1) 本問題で仮定した円柱と円筒の間の流れは連続の条件を満足することを示せ。
- (2) ナビエ・ストークス方程式から、周方向速度 $v_\theta(r)$ を求める方程式を示せ。
- (3) 問(2)で示した方程式を解くために必要な境界条件を記せ。
- (4) 周方向速度 $v_\theta(r)$ を求めよ。
- (5) 図 2 に示す微小要素周りの循環を求めよ。ただし、反時計回りを正とする。
- (6) 問(5)の結果を用いて渦度の回転軸方向成分を求めよ。
- (7) 圧力 $p(r)$ を支配する方程式を求め、その意味を説明せよ。
- (8) 円柱表面 $r=r_1$ での圧力を p_1 とした場合の $p(r)$ を求めよ。

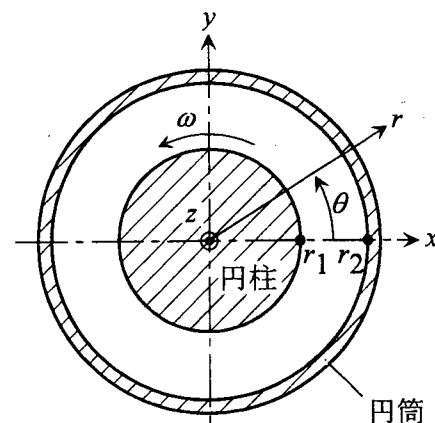


図 1

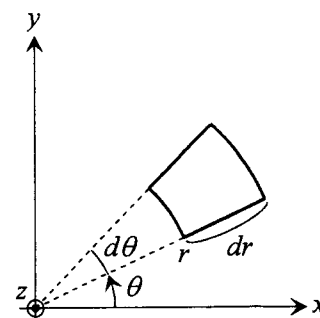


図 2

問題 3

次の問題 (1), (2) の中から 1 問選択し, 答案用紙に記入せよ。

(1) 自然数 n の階乗 ($n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$) の計算を行うプログラムを C 言語を用いて作成することを考える。int 型を 32 ビット符号付き整数として, 以下の間に答えよ。

(a) プログラム 1 は, 5 の階乗および 10 の階乗を求めるためのプログラムである。プログラム中の空白 (ア) および (イ) を適切な記号や式で埋めよ。

プログラム 1

```
#include <stdio.h>

int factorial(int n); /* プロトタイプ宣言 */

int main(void)
{
    printf("5!= %d\n", factorial(5)); /* 5 の階乗の計算結果出力 */
    printf("10!= %d\n", factorial(10)); /* 10 の階乗の計算結果出力 */

    return 0;
}

int factorial(int n)
{
    if (  (ア) )
        return 1;
    else
        return( n *  (イ) );
}
```

(b) プログラム 1 を実行させると,

```
5!= 120
10!= 3628800
```

と正しく出力される。しかしながら, n がある値より大きくなると, プログラム 1 と同じ手続きでは n の階乗を正しく計算することができなくなる。その理由を述べよ。また, プログラム 1 の関数 **factorial** を用いた場合の階乗の計算が可能な最大の自然数 n を求めよ。

(c) n が十分に大きい場合でも n の階乗を正しく計算できるようにするために, int 型の配列を用意し, ひとつの要素ごとに 4 桁の整数を格納する方式を考える。いま, $(i-1)!$ の計算結果が表 1 のような形式で int 型の配列 $data[0] \sim data[\maxNo]$ に格納されている場合, $(i-1)!$ の計算結果を利用して $i!$ の計算を行うための基本的な考え方は次のようになる。

【アルゴリズム 1】 $(i-1)!$ の計算結果を用いて $i!$ の計算を行う手順

i. $j \leftarrow 0, carry \leftarrow 0$.

ii. $j > \maxNo$ ならば, vi. へジャンプ。

iii. $data[j]$ と i を乗算し, さらに, キャリー $carry$ を加算する。

iv. iii. の計算結果の下位 4 桁を $data[j]$ に出力し, 上位の桁の値を $carry$ に出力する。

v. $j \leftarrow j + 1$ として ii. へ戻る。

vi. $carry$ が生じている場合には, $\maxNo \leftarrow \maxNo + 1$ とし, さらに $data[\maxNo] \leftarrow carry$ とする。

以上の処理を経て, $data[0] \sim data[\maxNo]$ に $i!$ の計算結果が格納される。プログラム 2 はアルゴリズム 1 をベースにして作成した 100 の階乗を計算するためのプログラムである。プログラム中の空白 (ウ) ~ (オ) を適切な記号や式で埋めよ。

問題 3 の続き (2 枚目)

表 1 int 型配列 data への 28 桁の整数 1111222233334444555566667777 の格納例

data[6]	data[5]	data[4]	data[3]	data[2]	data[1]	data[0]
1111	2222	3333	4444	5555	6666	7777

プログラム 2

```
#include <stdio.h>

int factorial(int *data, int n); /* プロトタイプ宣言 */

int main(void)
{
    int data[1000], i, value;

    value = factorial(data, 100); /* 100 の階乗計算 (問 (e) で戻り値 value の推定) */
    printf("100!=");
    for (i = value; i >= 0; i --) printf("%04d", data[i]); /* 100 の階乗を出力 */
    printf("\n");

    return 0;
}

int factorial(int *data, int n)
{
    int i, j, maxNo, carry, x;
    int *pointer;

    *data = 1; maxNo = 0;
    for (i = 1; i <= n; i++) {
        pointer = data;
        for (j = 0, carry = 0; j <= maxNo; j++) { /* アルゴリズム 1 */
            x = *pointer;
            x = x * i + carry;

            *pointer ++ =  ;
            carry =  ;
        }
        if (carry != 0) {
            *pointer =  ;
            maxNo ++;
        }
    }
    return maxNo;
}
```

- (d) プログラム 2 において, int 型の配列の各要素に (3 桁や 5 桁あるいは他の値ではなく) 「4 桁」の整数を格納する方式を採っている理由について説明せよ。
- (e) $n \gg 1$ の時に成立するスターリングの近似式 $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ を利用し, プログラム 2 における `factorial(data, 100)` の戻り値を推定せよ。ただし, $\log_{10} e \approx 0.434$, $\log_{10} 2\pi \approx 0.798$ とする。
- (f) プログラム 2 において, たとえ配列 `data` の要素数を十分大きな値に設定したとしても, ある n を越えると, $n!$ の計算結果が正しく出力されなくなるおそれがある。プログラム 2 の問題点について指摘し, その問題を解決するための対処法について述べよ。

問題 3 の続き (3 枚目)

- (2) トルク 250 N·m を図表 1 に示すようなフランジ形固定軸継手によって伝達したい。以下の問いに答えよ。なお、計算において以下の近似値を用いてよい。

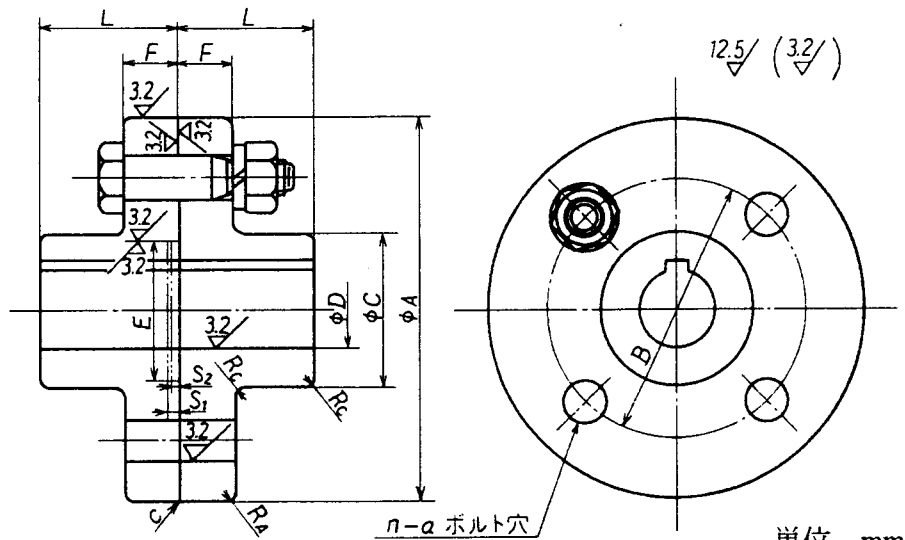
$$\sqrt[3]{\pi} \approx 1.46, \sqrt[3]{10} \approx 2.15, \sqrt[3]{100} \approx 4.64$$

ボルト直径 mm	10	14	16	20	25
断面積 mm ²	78.5	154	200	314	490

- (a) 中実軸にねじりのみ加わるとした場合、軸径は何ミリメートル以上あればよいか。ただし、軸の許容せん断応力を 32MPa とする。
- (b) トルクがボルトのせん断力のみによって伝えられる場合、どの継手を選べばよいか。問(a)の結果と合わせて、適合する外径の最も小さな継手を図表 1 から選べ。ただし、ボルトの許容せん断応力を 16 MPa とする。また有効ボルト数（実際にせん断力が加わるボルトの本数）を全ボルト数の 1/2 とし、ボルトの破断に対して張力は無視できるとする。
- (c) 問(b)で選択した継手において、キーがせん断破壊しないためには、キーの幅 b はいくら以上あればよいか。図表 2 の中から適合する最も小さなキーの呼び寸法を答えよ。ただし、キーの長さを L (図表 1 参照)、キーの許容せん断応力を 30 MPa とする。
- (d) 継手専用ボルトがなかったため、直径 10 mm のボルトに 40 MPa の引張応力を与え継手を接続した。この場合、トルクの伝達はボルトのせん断力ではなく、継手接触面の摩擦のみによるとする。問(a)の結果と合わせて、適合する外径の最も小さな継手を図表 1 から選べ。ただし、継手接触面を内径 D 、外径 A の環状とし、接触面内での圧力を一定、摩擦係数を 0.15 とする。

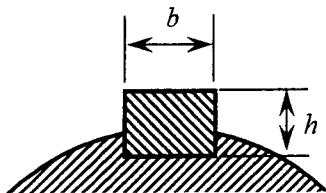
問題 3 の続き (4 枚目)

図表 1 フランジ形固定軸継手 (JIS B 1451 より抜粋)



継手 外径 A	D		L	C	B	F	n (個)	a
	最大軸穴 直径	最小軸穴 直径						
112	28	16	40	50	75	16	4	10
125	32	18	45	56	85	18	4	14
140	38	20	50	71	100	18	6	14
160	45	25	56	80	115	18	8	14
180	50	28	63	90	132	18	8	14
200	56	32	71	100	145	22.4	8	16
224	63	35	80	112	170	22.4	8	16
250	71	40	90	125	180	28	8	20
280	80	50	100	140	200	28	8	20
315	90	63	112	160	236	28	10	20
355	100	71	125	180	260	35.5	8	25

図表 2 平行キー (JIS B 1301 より抜粋)



キーの呼び寸法 $b \times h$	b	h
2×2	2	2
3×3	3	3
4×4	4	4
5×5	5	5
6×6	6	6
8×7	8	7
10×8	10	8
12×8	12	8

キーの呼び寸法 $b \times h$	b	h
14×9	14	9
16×10	16	10
18×11	18	11
20×12	20	12
22×14	22	14
25×14	25	14
28×16	28	16
32×18	32	18

単位 mm