

機 械 科 学 I

(問題1から問題3の全てに解答し、それぞれ別の答案用紙に記入せよ。各問題に2枚以上の答案用紙を用いる場合は、「問題1 (2枚目)」などのように記入せよ。)

問題 1 (小問(1), (2)の両問に答えよ)

(1) 常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - y + 1 - x^3 - x(y-1)^2 \\ x + ay - a - (y-1)x^2 - (y-1)^3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

の解について以下の問に答えよ。ただし、 x, y は $t (\geq 0)$ の実関数で a は実定数とする：

- (a) $dx/dt = dy/dt = 0$ となる平衡点 $x = x_c, y = y_c$ を求めよ。
 (b) 平衡点近傍での解を $\tilde{x} = x - x_c, \tilde{y} = y - y_c$ において、 \tilde{x}, \tilde{y} が十分小さくその高次項を無視すると式(1)は定数行列 J を用いて

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

とかける。このとき、 J の具体的な形を求めよ。

- (c) \tilde{x}, \tilde{y} の $t = 0$ での初期値を x_0, y_0 として、式(2)の解を求めよ。さらに、 $a \leq 0$ と $a > 0$ の場合、 $t \gg 1$ での解の定性的な振る舞いを (x, y) 平面に図示せよ。
 (d) $a > 0$ のときの式(1)の解の定性的な振る舞いを調べるため、変数

$$H = \frac{1}{2} [(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2]$$

を用いると、式(1)から H に関する微分方程式を導くことができる。この微分方程式を示し、初期値 $H = H_0$ に対し解を求めよ。また、 $t \gg 1$ でこの解がどのような値に漸近するか調べよ。

(2) N 個の球を、番号付けされた N 個の箱にそれぞれ一つずつ入れる場合を考える。球は3種類あり、それぞれ N_A, N_B, N_C 個ある。ただし、 $N_A + N_B + N_C = N, N_A \geq 1, N_B \geq 1, N_C \geq 1, N = 3K (K \geq 1, K: \text{整数})$ である。同じ種類の球は区別しないものとして以下の問に答えよ：

- (a) 球を入れる場合の数 Ω を求め、 $S = \ln \Omega$ を計算せよ。
 (b) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して、

$$\ln(n-1)! < \int_1^n \ln x dx < \ln n!$$

が成り立つことを図を用いて示せ。

問題 1 の続き

(c) 積分

$$\int_1^n \ln x dx$$

の値を求めよ.

(d) 問 (c) の結果を用いて, $n \gg 1$ のとき,

$$\ln n! \simeq n \ln n - n$$

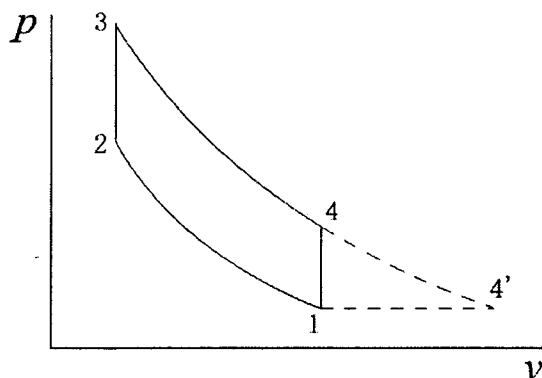
が成り立つことを示せ.

(e) $K \gg 1$ のとき, 問 (d) の結果を用いて S が最大となるときの N_A , N_B , N_C をそれぞれ求めよ.

問題 2

次の(1), (2)の両方を解答し, それぞれ別の答案用紙に記入せよ.

- (1) 理想気体の可逆的な状態変化からなるサイクルに関する以下の間に答えよ. ただし, 理想気体の比熱比 $\kappa = c_p/c_v$ (>1) は温度に依存せず一定であるとする. c_p と c_v はそれぞれ理想気体の定圧比熱と定積比熱を表す. 可逆断熱変化をする理想気体の圧力 p と比体積 (単位質量あたりの体積) v の間には $pv^\kappa = \text{const.}$ なる関係が成り立つ. 必要に応じて表の数値を用いよ.
- (a) 図の $p-v$ (圧力-比体積) 線図に実線で示すガスサイクル $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ を考える. 状態変化 $1 \rightarrow 2$ は断熱圧縮, 状態変化 $2 \rightarrow 3$ は定積加熱, 状態変化 $3 \rightarrow 4$ は断熱膨張, 状態変化 $4 \rightarrow 1$ は定積冷却である. 状態 1 の絶対温度を T_1 , 状態 1, 2 の気体の比体積 v_1, v_2 の比 (圧縮比) を $\varepsilon = v_1/v_2$, 状態 2, 3 の圧力 p_2, p_3 の比を $\xi = p_3/p_2$ とする. このとき, $2 \rightarrow 3$ で単位質量の気体に与えられる熱量 q_{23} を求めよ. また, $\kappa = 7/5, \varepsilon = 9, \xi = 4$ であるとき, このサイクルの理論熱効率を計算せよ.
- (b) 図に破線で示すように, (a) のサイクルの断熱膨張 $3 \rightarrow 4$ を状態 $4'$ まで延長し, その後, $4' \rightarrow 1$ で気体を定圧冷却するガスサイクル $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4' \rightarrow 1$ を考える. $4' \rightarrow 1$ で単位質量の気体から取り去られる熱量 $q_{4'1}$ を求めよ. また, $\kappa = 7/5, \varepsilon = 9, \xi = 4$ であるとき, このサイクルの理論熱効率を計算し, (a) のサイクルに比べ効率が向上していることを確認せよ.
- (c) (a) および (b) のガスサイクルを同一の $T-s$ (温度-比エントロピ) 線図に図示せよ. 図中には状態 1, 2, 3, 4, $4'$ がどこかも示せ. また, 単位質量の気体が (a) および (b) の各サイクルにおいて外になす正味の仕事に相当する各領域を図示せよ. さらに, この図を用いて, (b) のサイクルの熱効率が (a) より大きくなる理由を簡潔に述べよ.



図

表

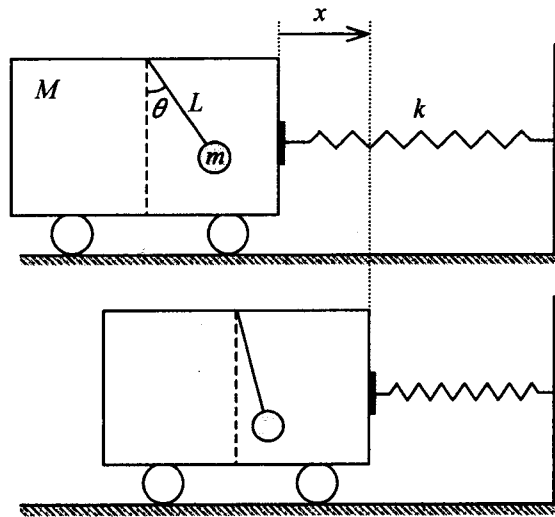
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^{7/5}$	2.64	4.66	6.96	9.52	12.29	15.25	18.38	21.67	25.12
$x^{5/7}$	1.64	2.19	2.69	3.16	3.60	4.01	4.42	4.80	5.18

問題 2 の続き

- (2) 温度 T_o [°C] の室外と温度 T_i [°C] の室内を隔てる厚さ 0.1 m, 熱伝導率 $1 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ の平面壁があり, 室外側壁表面には日射により単位時間単位面積当たり q_{rad} [W/m^2] の熱量が加えられるものとする. 室外側壁表面の熱伝達率を $50 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, 室内側壁表面の熱伝達率を $25 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ として以下の間に答えよ. ただし, 熱の移動は壁の厚さ方向 (壁表面に対して垂直方向) のみに起こり, 一次元定常熱伝導問題として扱えるものとする.
- (a) まず, 日射がない場合 ($q_{rad} = 0$), $T_i > T_o$ として室内側壁表面温度 $T_{s,i}$ [°C] および室内から室外へ流出する単位時間単位面積当たりの熱量 q_o [W/m^2] を, 室内温度 T_i と室外温度 T_o を用いて表せ.
- (b) つぎに, $q_{rad} > 0$ の日射がある場合に, 室内温度と室外温度が同じ T_m ($T_i = T_o = T_m$) であるものとして, 室外側壁表面温度 $T_{s,o}$ [°C] および壁から室内に流入する単位時間単位面積当たりの熱量 q_i [W/m^2] を, 入射量 q_{rad} と温度 T_m を用いて表せ.
- (c) $q_{rad} > 0$ の日射があり, さらに $T_i > T_o$ のとき, 壁と室内の間で熱の出入りがない条件を, 入射量 q_{rad} , 室内温度 T_i および室外温度 T_o を用いて表せ.

問題 3

- (1) 質量 M の貨車が、バネ定数 k の車両止めに向かって直線走行している。貨車の天井からは、質量が無視できる長さ L のたわまない糸に質量 m の錘をつけた振り子が吊り下げられている。貨車は車両止めにぶつかった瞬間に車両止めに連結される。連結された瞬間からの貨車の右向きの移動量を x とする (下図)。貨車の両輪は常に接地しているものとして、以下の設問に答えよ。但し、重力加速度を g とし、時間は t とせよ。
- (a) この系の運動エネルギー T 及びポテンシャルエネルギー U を求め、運動方程式を導け。但し、車輪の転がり抵抗、車両止め及び振り子の糸の質量は無視せよ。また、振り子は進行方向を含む鉛直面内のみで振動するものとせよ。
- (b) 振り子の振幅は L に比べて微小であるとして、この系の固有振動数を求めよ。



- (2) 一定張力 T のもとで両端を固定された線密度 ρ (単位長さあたりの質量)、長さ L の弦 (曲げ剛性が無く、張力による復元力を持つ) について、以下の設問に答えよ。
- (a) 微小要素のたわみ方向の釣り合いより、弦のたわみ $w(x, t)$ の支配式が

$$T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

となることを示せ。但し、弦の伸びは無視し、たわみ角 θ は微小、すなわち、 $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$ とする。

- (b) この弦の固有振動数を求めよ。
- (c) 時刻 $t=0$ において、弦のたわみと速度を、

$$w(x, 0) = \begin{cases} \frac{a}{s} x & (0 < x < s) \\ \frac{a}{L-s} (L-x) & (s < x < L) \end{cases}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < L) \quad (2)$$

と与えた時の解を求めよ。ただし、 a は定数とする。