機 械 科 学 Ｉ

（問題１〜問題３の全てに解答せよ．問題３については，問題(1)，(2)の中から１問，問題(3)，(4)の中から１問選択し，それぞれの答案用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目）」などのように記入せよ．）

問題１

以下の設問（１），（２）に答えよ．

（１）関数 $f(t)$ に対する次の微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dt^2}+\varepsilon f=0$$

を初期条件

$$f(0)=0,\quad \frac{df}{dt}(0)=1$$

の下，$t>0$ の範囲で解くことを考える．定数 ε を正として，下記の問に答えよ．

（ａ）この微分方程式の厳密解を求めよ．次に，その厳密解を $t=0$ まわりでテイラー展開し，５次までの精度の近似解を求めよ．

（ｂ）ε が十分小さい $(\varepsilon \ll 1)$ と仮定し，摂動法により $f(t)$ を ε のべきで

$$f(t)=f_0(t)+\varepsilon f_1(t)+\varepsilon^2 f_2(t)+\cdots$$

のように展開する．ε の２次までの精度の近似解を求めるため，$f_0(t)$，$f_1(t)$ および $f_2(t)$ を解け．ただし，初期条件は

$$f_0(0)=0,\quad \frac{df_0}{dt}(0)=1,\quad f_n(0)=0,\quad \frac{df_n}{dt}(0)=0,\quad (n=1,2,3\cdots)$$

ととる．

（ｃ）上記２つの近似解を比較検討せよ．

（２）n 次実対称行列 $\mathbf{A}$ は，重複を含めて n 個の固有値 λ_i $(\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n)$，および λ_i に対応する互いに独立で正規化された n 個の固有ベクトル $\mathbf{x}_i$ を持つ．$\mathbf{E}_i=\mathbf{x}_i{}^t\mathbf{x}_i$ として以下の問に答えよ．ただし，${}^t(\ )$ は転置を表す．

（ａ）$\mathbf{A}$ が実対称行列であることに注意して，

$$\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j=\begin{cases}\mathbf{E}_i & (i=j)\\ \mathbf{0} & (i\neq j)\end{cases}$$

および

$$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{E}_1+\lambda_2\mathbf{E}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{E}_n$$

が成立することを証明せよ．

（ｂ）$\mathbf{I}$ を n 次の単位行列とし，$\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ の無限級数展開

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\mathbf{A}^k$$

が収束するための，λ_i についての条件を求めよ．

（ｃ）行列 $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1/4 & 0 & -1/4\\ 0 & 1 & 0\\ -1/4 & 0 & -1/4\end{bmatrix}$$

として，$\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ を求めよ．

問題 2

次の(1)，(2)の両方を解答し，それぞれ別の答案用紙に記入せよ．

(1) ある理想気体の可逆的な状態変化に関して，以下の問(a)，(b)，(c)に答えよ．ただし，この気体の気体定数をR，比熱比をκ（$= c_p/c_v > 1$，c_p：定圧比熱，c_v：定積比熱）とする．また，気体の絶対温度をT，圧力をp，単位質量あたりの体積をvとする．可逆断熱変化（等エントロピ変化）をする気体では pv^κ は一定に保たれる．気体の運動エネルギや位置エネルギの変化は無視できるものとする．以後，例えば状態量 f の状態Aにおける値を f_A のように表すことにする．

(a) この気体の状態Aから状態Bへの断熱膨張と，状態Aから状態Cへの等温膨張とを考える．$p-v$ 線図での状態Aにおける断熱膨張A→Bに対応する曲線の勾配$(\partial p/\partial v)_s$（$s$：単位質量あたりのエントロピ）と等温膨張A→Cに対する勾配$(\partial p/\partial v)_T$との比$(\partial p/\partial v)_s/(\partial p/\partial v)_T$を求めよ．また，断熱膨張A→Bで単位質量の気体が外になす工業仕事

$$w_{AB} = -\int_A^B v\,dp$$

を求め，κ，R，T_A，p_A，p_B を用いて表せ．さらに，等温膨張A→Cで外から単位質量の気体に加えられる熱量 q_{AC} を求め，R，T_A，p_A，p_C を用いて表せ．

(b) 図１のような断熱膨張A→X，定圧加熱X→Y，および断熱膨張Y→Dからなる過程A→X→Y→Dを考える．ただし，状態Aと状態Yの温度は等しいものとする．過程A→X→Y→Dで単位質量の気体が外になす工業仕事 w_{AXYD} を求め，κ，R，T_A，p_A，p_X，p_D を用いて表せ．また，w_{AXYD} が最大となるときの p_X および w_{AXYD} の最大値を求め，κ，R，T_A，p_A，p_D のうち必要なものを用いて表せ．

(c) 等温過程を含む熱機関の図２のような理論サイクル1→2→3→4→1を考える．このサイクルは，等温圧縮1→2，定圧加熱2→3，等温膨張3→4，および定圧冷却4→1からなる．このサイクルの理論熱効率 ηを求め，κ，T_1，T_3，p_1，p_2 を用いて表せ．

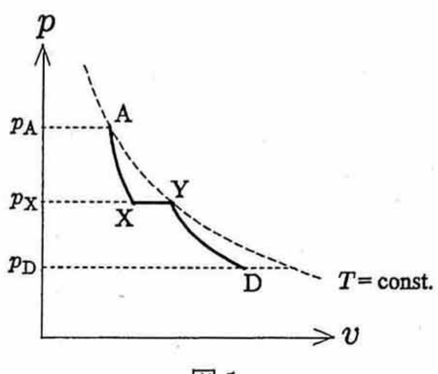


図 1

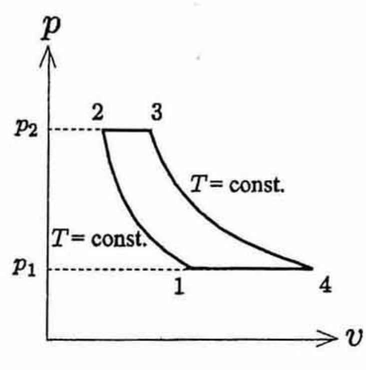


図 2

問(b)のような断熱膨張と定圧加熱を交互に十分多数行う膨張過程によって，近似的に等温膨張が実現できる．また，同様に断熱圧縮と定圧冷却を交互に十分多数行う圧縮過程を考えれば，近似的に等温圧縮が実現できる．これらの過程により，近似的に問(c)のサイクル中の等温過程が実現される．

問題２の続き

(2) 図３に示すように，内半径 r_i，外半径 r_o で，内表面温度が T_i，外表面温度が T_o に保たれた十分長い円筒状の保温材について考える．いま，保温材として熱伝導率が異なる３種類の材料 A，B，C があり，材料 B の熱伝導率を k_B としたとき，材料 A および材料 C の熱伝導率 k_A および k_C は，それぞれ $k_A = 0.5k_B$，$k_C = 2k_B$ の関係がある．保温材内の温度は半径方向座標 r のみに依存し，定常一次元問題として扱えるものとして，以下の問に答えよ．

(a) 保温材内の r 方向温度分布 $T(r)$ を支配する微分方程式を導き，その一般解を示せ．

(b) 保温材が材料 B のみからなるとした場合の単位時間，単位長さ当たりの放熱量 Q_B を求めよ．

(c) 内側に材料 A を，外側に材料 C を用いた２層の保温材を考える．単位時間，単位長さ当たりの放熱量が(b)で求めた Q_B と等しくなる場合の材料 A と材料 C の界面の半径 r_{AC} を，r_i および r_o を用いて表せ．ただし，界面における接触熱抵抗は無視できるものとする．

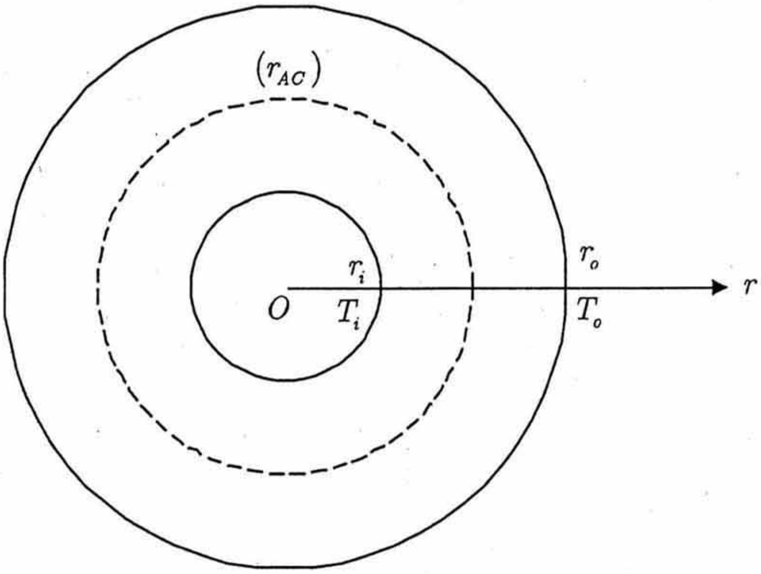


図３

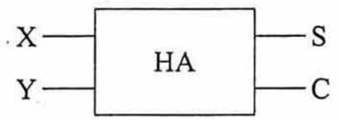
平成 19 年度入試

問題 3

次の問題 (1), (2) の中から 1 問，問題 (3), (4) の中から 1 問選択し，それぞれの答案用紙に記入せよ．

(1) 加算器に関する以下の問に答えよ．

(a) 図 1 は 1 ビットのハーフアダー（HA:半加算器）の入出力を表したものである．HA の真理値表を作成せよ．また，その表をもとに論理素子を使って HA 回路を設計せよ．ただし，論理素子としては図 2 に示すような 2 入力 AND，2 入力 OR，NOT を使うこと．それぞれの素子は複数個の使用が許されるが，素子合計は最大 6 個とする．なお，真理値表の入出力のレベルは 0 または 1 で表すこと．



X, Y ： 入力
S ： 和の出力
C ： キャリー（桁上げ）出力

図 1

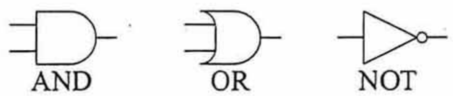


図 2

(b) 2 の補数を用いて正の 2 進数 A, B の減算を行ない，計算結果の符号と絶対値を求めたい．まず，4 ビットの正の 2 進数 A=1101，B=1010 に対して，A － B および B － A を求める計算手順を具体的に示せ．次に，これを参考にして，n ビットの正の 2 進数減算の一般的な手順をまとめよ．

平成 19 年度入試

問題３の続き２

(2) 連立一次方程式の解法について，以下の問に答えよ．

(a) n 元連立一次方程式が次のような形で書ける場合，最下行の式から順に x_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ を求めることで解が得られる．x_i を $x_{i+1}, \cdots, x_{n-1}$ を用いて示せ．ただし，$a_{i,i} \neq 0$ とする．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{0,0}x_0 & + & a_{0,1}x_1 & + & \cdots\cdots\cdots & + & a_{0,n-1}x_{n-1} & = & b_0 \\
 & & a_{1,1}x_1 & + & \cdots\cdots\cdots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & = & b_1 \\
 & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{n-2,n-2}x_{n-2} & + & a_{n-2,n-1}x_{n-1} & = & b_{n-2} \\
 & & & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & = & b_{n-1}
\end{array}
$$

(b) 次に示す 3 元連立一次方程式を問 (a) のように変形した一例を示せ．

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.
$$

(c) 次に示す 2 元連立一次方程式

$$\varepsilon x_0 + x_1 = 0.5 \qquad ①$$

$$x_0 + x_1 = 1 \qquad ②$$

を問 (a) の形に変形して解く際に，②式から x_0 を消去し

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 - \frac{0.5}{\varepsilon} \end{pmatrix}
$$

と変形する場合と，①式から x_0 を消去し

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 - \varepsilon \end{pmatrix}
$$

と変形する場合とがある．$|\varepsilon|$ が 1 に比べて十分に小さい時，数値計算の精度上後者が優れている．その理由を説明せよ．

(d) 4 元連立一次方程式を解くプログラムを次ページに示す．$\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に適切と思われる語句や数値を示せ．ただし，簡単のため一意解が得られる問題が与えられていると仮定し，エラー処理等は行っていない．なお，`double fabs(double x)` は引数 x の絶対値を戻り値とする関数である．

(e) 問 (d) のプログラムにおいて，`void swap(double *x,double *y)` は x と y を交換する関数である．$\boxed{\text{オ}}$ を埋めて，この関数を完成せよ．ただし，$\boxed{\text{オ}}$ は一文とは限らない．また，この関数は変数 x と y のポインタを引数として受け取っているが，この理由についても述べよ．

平成19年度入試

問題3の続き3

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 4
void swap(double *x, double *y);

int main(void)
{
  double a[N][N]={{ 3.0,  1.0,  2.0,  1.0},
                  {-1.0,  4.0, -3.0, -3.0},
                  { 1.0, -3.0,  1.0,  2.0},
                  { 2.0, -1.0, -1.0, -2.0}};
  double b[N]={9.0, -6.0, 6.0, 3.0};
  double tmp;
  int i, j, k, pivot;

  for( i=0; i<N-1; i++ ){
    /******** ピボッティング ********/
    /**** 手順 [1] ****/
    for( j=i; j<N; j++ ){
      [   ア   ] = fabs( a[j][i] );
      for( k=i+1; k<N; k++ ){
        if( tmp < fabs( a[j][k] ) ){
          tmp = fabs( a[j][k] );
        }
      }
      for( k=i; k<N; k++ ){
        a[j][k]/=tmp;
      }
      b[j]/=tmp;
    }
    /**** 手順 [2] ****/
    pivot = [   イ   ];
    [   ア   ] = fabs( a[i][i] );
    for( j=i+1; j<N; j++ ){
      if( tmp < fabs(a[j][i]) ){
        tmp = fabs( a[j][i] );
        pivot = j;
      }
    }
    for( k=i; k<N; k++ ){
      swap( &a[i][k], &a[pivot][k] );
    }
    swap( &b[i], &b[pivot] );

    /**** 前進消去 ****/
    for( j=i+1; j<N; j++ ){
      tmp = [   ウ   ];
      for( k=i+1; k<N; k++ ){
        a[j][k] -= tmp*a[i][k];
      }
      b[j] -= tmp*b[i];
    }
  }
  /**** 後退代入 ****/
  for( i=N-1; i>=0; i--){
    for(j = i+1; j<N; j++){
      b[i] -= [   エ   ];
    }
    b[i] /= a[i][i];
  }

  /******** 答えの表示 ********/
  for( i=0; i<N; i++ ){
    printf( "x%d=%f ", i, b[i] );
  }
  printf( "\n" );

  return 0;
}

/**** x と y を入れ替える ****/
void swap(double *x, double *y)
{
  [   オ   ]
}
```

なおこのプログラムは，連立方程式を 問 (a) に示す形式に変形する際に，$a_{i,i}=0$ や $a_{i,i}\approx 0$ に対処するために，ピボッティングと呼ばれる処理を実行している．具体的には，

$$
\begin{array}{rcll}
a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{0,n-1}x_{n-1} & = & b_0 & (0)\\
\ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots & \\
a_{i-1,i-1}x_{i-1} + a_{i-1,i}x_i + \cdots + a_{i-1,n-1}x_{n-1} & = & b_{i-1} & (\mathrm{i}-1)\\
a_{i,i}x_i \ + \cdots + \ a_{i,n-1}x_{n-1} & = & b_i & (\mathrm{i})\\
a_{i+1,i}x_i + \cdots + a_{i+1,n-1}x_{n-1} & = & b_{i+1} & (\mathrm{i}+1)\\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots & \\
a_{n-1,i}x_i + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} & = & b_{n-1} & (\mathrm{n}-1)
\end{array}
$$

のように変形された段階で，(i)式を用いて，(i+1)式から(n-1)式の x_i を消去する前に，次の処理を行う．

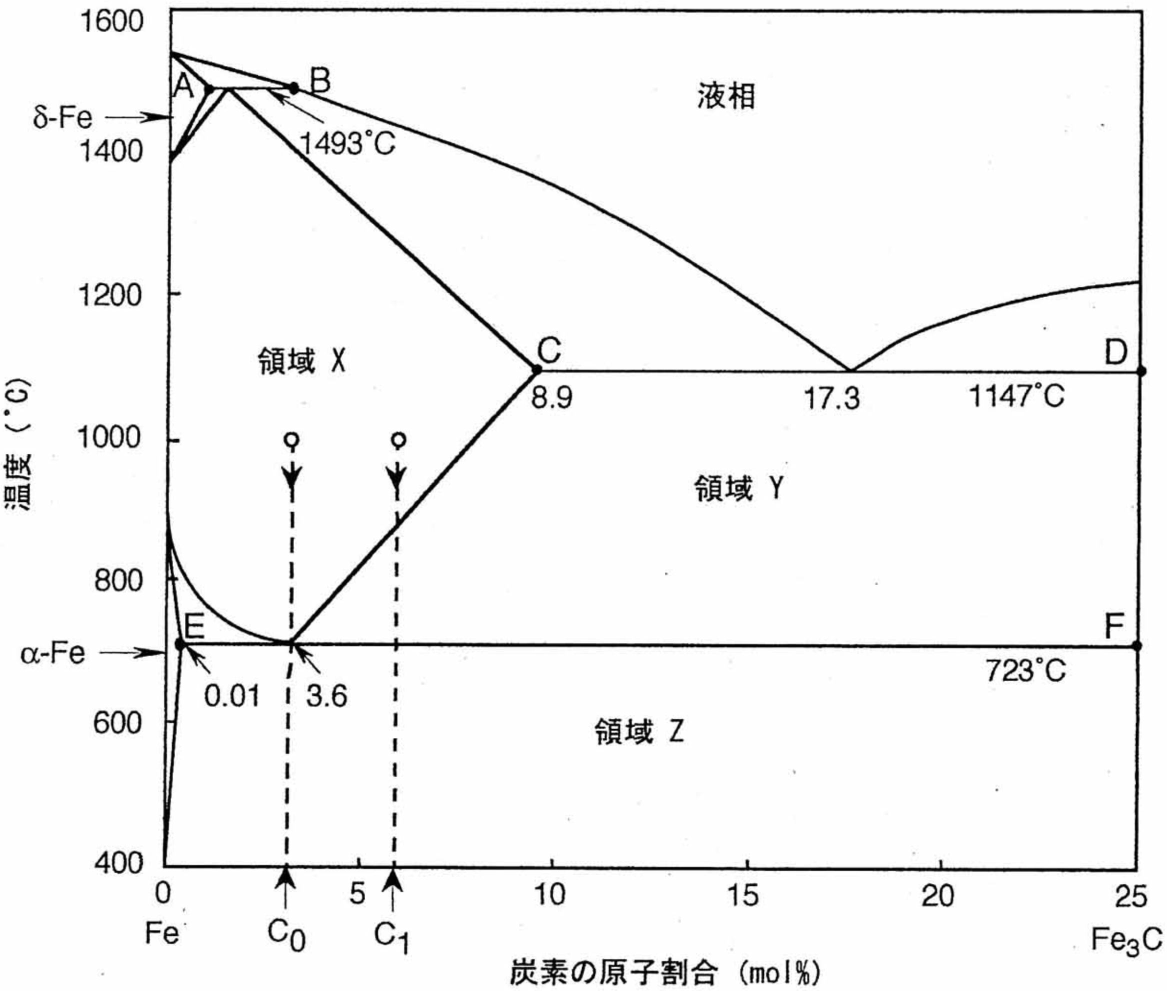
手順 [1]　(j)式 $a_{j,i}x_i+\cdots+a_{j,n-1}x_{n-1}=b_j$ の両辺を $\max\limits_{i\le k\le n-1}|a_{j,k}|$ で除する．ただし，$j=i,i+1,\cdots,n-1$.

手順 [2]　係数 $a_{j,i}$ $(j=i,i+1,\cdots,n-1)$ の中で絶対値最大のものを $a_{p,i}$ とすると，

(i)式 $a_{i,i}x_i+\cdots+a_{i,n-1}x_{n-1}=b_i$ と(p)式 $a_{p,i}x_i+\cdots+a_{p,n-1}x_{n-1}=b_p$ を入れ替える．

問題３の続き４

(3) 下の図は鉄—炭素系合金状態図である．次の問に答えよ．



(a) 図中に示す線分AB, CD, EFで生じる相変態の反応の名称を答えよ．

(b) 平衡状態において図中の領域X，Y，Zで存在する相の構成を名称で答えよ．

(c) α-Feは体心立方構造を持つ結晶性材料である．α-Feの質量密度ρを原子半径r，原子量M，アボガドロ数Nを用いて導出せよ．

(d) 鉄と炭素からなる金属間化合物Fe_3Cにおける炭素の質量割合を求めよ．ただし，鉄，炭素の原子量を，それぞれ56，12とする．

(e) 炭素割合C_0=3.6(mol%)を含む合金を1000℃から室温まで冷却する．冷却の状態が，急冷（水冷）の場合と，徐冷（炉冷）の場合について得られる金属組織の名称および両者の機械的特性の違いについて述べよ．

(f) 炭素割合C_1=6.0(mol%)を含む合金を1000℃から室温まで徐冷する．形成される全Fe_3Cのうち，図中の線分EFの反応以降で形成されるFe_3Cの組織全体に占める原子割合を求めよ．ただし室温におけるα-Feへの炭素の溶解度は0とする．

問題3の続き5

(4) 図1のようなコイル平均径Dのクローズドエンドの圧縮コイルバネを考える．このバネの素線直径dと有効巻き数Nを，荷重Pでたわみがδとなる条件で設計したい．以下の問に答えよ．

(a) 図2のように，コイルバネの素線断面に，せん断力PとねじりモーメントTが作用すると考え，素線の曲がりを無視すると，PとTによってバネの素線表面に生じる最大せん断応力τ_{max}は，

$$\tau_{max} = \tau_0\left(1+\frac{1}{2c}\right), \quad \tau_0 = \frac{8DP}{\pi d^3}$$

で与えられることを示せ．ただし，cはバネ指数で$c = D/d$である．

(b) バネに蓄えられる弾性ひずみエネルギUが，PによるひずみエネルギU_1とTによるひずみエネルギU_2の和として与えられるとすると，Uは

$$U = U_1 + U_2 = \frac{2NcP^2\left(1+2c^2\right)}{Gd}$$

となることを示せ．ただし，Gはバネ鋼の剛性率である．

(c) バネ指数が1に比べて十分大きいとき，(b)の結果を参考にして，バネのたわみδを求めよ．

(d) 実際にバネを設計するときは，素線の曲がりをも考慮した式

$$\tau_{max} = \kappa\tau_0$$

を用いて設計している．ここで，κは応力修正係数でバネ指数cの関数である．いま，バネ鋼の許容せん断応力がτ_a = 720 MPaであるとき，下記の条件で，図3を参照してバネ指数cを定め，バネの素線直径dと有効巻き数Nを計算せよ．

条件：G = 80 GPa，P = 942 N，δ= 31.4 mm，D = 30 mm

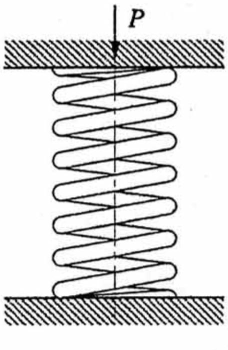


図1

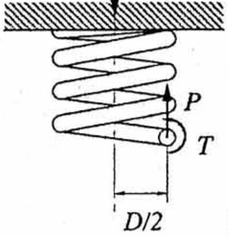


図2

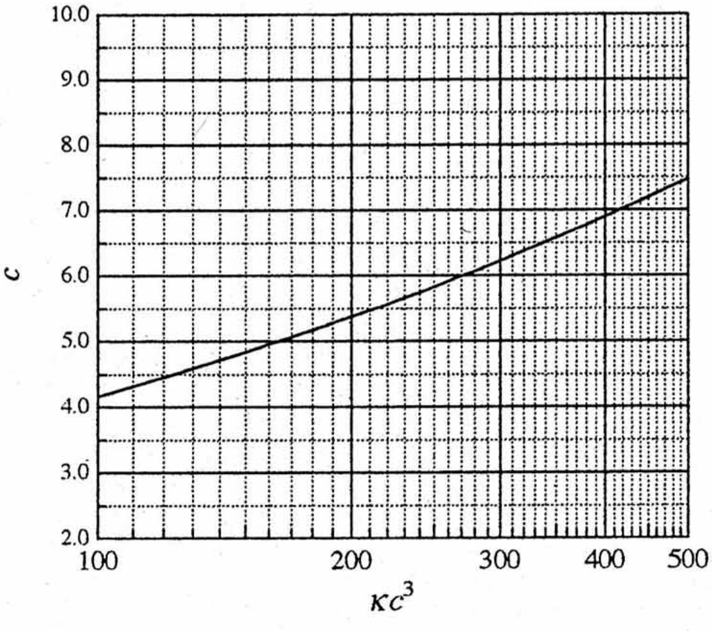


図3