

## 生体システム工学Ⅱ

次の〔Ⅱ-1〕～〔Ⅱ-3〕の3題を、それぞれ別の解答用紙に答えよ。

### 〔Ⅱ-1〕

- (1) 区間 $(0, \infty)$ で区分的に連続な実関数 $f(t)$  ( $t \geq 0$ )を考える。  $s$ を複素数として、 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

ここで、 $F(s)$ を像関数と呼ぶ。このとき、 $f(t)$ に関する以下の問に答えよ。

- (a) 像関数が(i), (ii)で与えられる $f(t)$ をそれぞれ求めよ。

$$(i) \frac{3s+16}{s^2+4s+29} \qquad (ii) \frac{s+4}{s^3+5s^2+8s+4}$$

- (b) ラプラス変換を用いて、次の微分積分方程式および初期条件を満たす $f(t)$ を求めよ。

$$\frac{df(t)}{dt} + 5f(t) + 6 \int_0^t f(\tau) d\tau = u(t-1) - u(t-2), \quad f(0) = 3$$

ここで、 $u(x)$ は次式で定義される単位階段関数である。

$$u(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

- (2) 1つの入力 $x$ に対して1つの出力 $y$ が与えられる実験がある。この実験を異なる入力 $x$ について4回実施し、4つの実験データ $(x, y) = (-2, 0), (0, -2), (1, 1), (-1, -1)$ を得た。これらの4つの実験データを、最小二乗法で2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ に近似したときの、係数 $a, b, c$ の値を求めよ。ただし、導出過程も示せ。

## [II-2]

(問1) 相互作用が無視でき、互いに区別できる  $N$  個の粒子からなる体積  $V$  の孤立した系を考える。この系の全エネルギーは一定値  $E_{\text{total}}$  に保たれている。各粒子は、それぞれ離散的なエネルギー準位  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) のいずれかの状態をとることができる。また、エネルギー準位  $\epsilon_i$  である粒子の数を  $n_i$  とする。このとき、以下の2つの条件が常に満たされるものとする。

$$\text{条件1 粒子数保存則: } \sum_{i=1}^r n_i = N$$

$$\text{条件2 エネルギー保存則: } \sum_{i=1}^r n_i \epsilon_i = E_{\text{total}}$$

(ア) 総数  $N$  個の粒子を各エネルギー準位  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r\}$  に分配することを考える。これは、 $N$  個の粒子から  $n_1$  個を選び準位  $\epsilon_1$  に配置し、次に残った  $(N - n_1)$  個の粒子から  $n_2$  個を選び  $\epsilon_2$  に配置するといった手順を順に行っていく組み合わせの総数に等しい。配置の総数  $W$  が

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^r n_i!} \quad (1)$$

で与えられることを示せ。

(イ) 総数  $W$  を最大にする粒子数の組  $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$  を考える。ただし、粒子の総数  $N$  および各準位の粒子数  $n_i$  は十分に大きいものとする。 $\lambda, \beta$  をそれぞれ条件1と条件2に対応する未定乗数として、ラグランジュ関数

$$F(n_1, n_2, \dots, n_r) = \ln W - \lambda \left( \sum_{i=1}^r n_i - N \right) - \beta \left( \sum_{i=1}^r n_i \epsilon_i - E_{\text{total}} \right) \quad (2)$$

を定義する。エネルギー準位  $\epsilon_i$  における粒子数  $n_i$  を  $\lambda, \beta, \epsilon_i$  を用いて表せ。このとき、スターリングの公式  $\ln n! \approx n \ln n - n$  ( $n \gg 1$ ,  $n$  は整数) を用いてもよい。

(ウ) 粒子1個がエネルギー準位  $\epsilon_i$  に見出される確率は、

$$p(\epsilon_i) = \frac{n_i}{N} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \epsilon_i) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $Z$  は分配関数と呼ばれる規格化定数である。条件1を用いて、分配関数  $Z$  を  $\beta$  と  $\epsilon_i$  を用いて表せ。

(エ) 分配関数  $Z$  を用いて, 系の平均エネルギーとエネルギー分散がそれぞれ, 式 (4) と式 (5) で与えられることを示せ. なお,  $\langle E^k \rangle = \sum_{i=1}^r \epsilon_i^k p(\epsilon_i)$  とする ( $k$  は実数).

(i) 系の平均エネルギー  $\langle E \rangle$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta} \quad (4)$$

(ii) 系のエネルギー分散  $\sigma_E^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$

$$\sigma_E^2 = \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2} \quad (5)$$

(問2) ボルツマンマシンは, 相互結合型ニューラルネットワークの一種であり, ネットワークを構成する各素子は互いに接続され確率的に 0 か 1 の状態をとる. 図1は, ネットワークの模式図である.  $M$  個の素子から構成されるボルツマンマシンでは, 素子  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) の状態  $x_i$  の組  $(x_1, x_2, \dots, x_M)$  がネットワークの状態となる. このとき, ネットワークのエネルギー関数は

$$E_{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_M) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^M b_i x_i \quad (6)$$

と定義される. ここで,  $w_{ij}$  は素子  $i$  と  $j$  との結合の重み,  $b_i$  は素子  $i$  のバイアスである. なお, 自己結合はなく ( $w_{ii} = 0$ ), 重みに対称性を有するとする ( $w_{ij} = w_{ji}$ ). また, 各素子の状態  $x_i$  は, 他の素子からの入力を受け, 式 (7), (8) で定まる確率に従い 0 か 1 の状態が決まる.

$$p(x_i = 1) = \frac{1}{1 + \exp\left(-a \left(\sum_{j=1}^M w_{ij} x_j + b_i\right)\right)} \quad (a \text{ は, } a > 0 \text{ の定数}) \quad (7)$$

$$p(x_i = 0) = 1 - p(x_i = 1) \quad (8)$$

(ア) 3つの素子から構成されるボルツマンマシンを考える. このとき, ネットワークは8通りの状態を取り得る (例えば,  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ ). 結合の重みとバイアスの値がそれぞれ,

$$w_{12} = 1, \quad w_{13} = -1, \quad w_{23} = 0.5$$

$$b_1 = 0.1, \quad b_2 = -0.2, \quad b_3 = 0.3$$

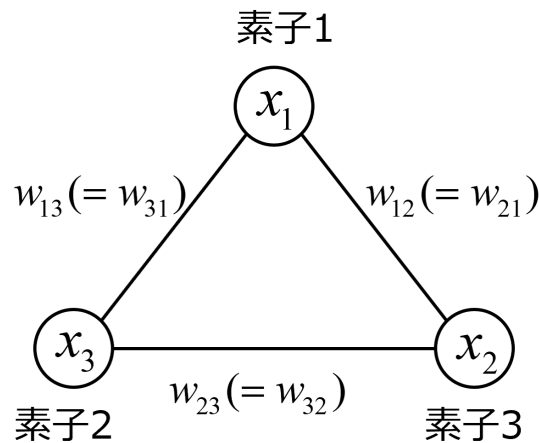


図 1: ボルツマンマシンの模式図

で与えられるとき、各状態でのエネルギー関数  $E_{\text{net}}(x_1, x_2, x_3)$  の値をそれぞれ求めよ。

(イ) 重みとバイアスの値が全て固定されている  $M$  個の素子からなるボルツマンマシンを考える。

(i) 素子  $i$  の状態  $x_i$  が 0 から 1 へと更新される際のエネルギー関数の値の変化

$$\Delta E_{\text{net}} = E_{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_M) - E_{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_M) \quad (9)$$

を求めよ。

(ii) 式 (7) で与えられる確率  $p(x_i = 1)$  を  $\Delta E_{\text{net}}$  を用いて表せ。

(iii) ボルツマンマシンでは、エネルギー関数の値が減少する方向へ各素子の状態が確率的に変化する。このことを、 $p(x_i = 1)$  と  $\Delta E_{\text{net}}$  との関係から説明せよ。

(ウ) ボルツマンマシンでは、ネットワークの状態  $(x_1, x_2, \dots, x_M)$  はボルツマン分布

$$p_{\text{B}}^{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_M) = \frac{\exp(-\beta E_{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_M))}{Z} \quad (10)$$

に従い確率的に実現される。ただし、 $\beta$  は  $w_{ij}$  とは独立な定数とし、分配関数  $Z$  はネットワークが取り得る全ての状態についての和である。すなわち、

$$Z = \sum_{x_1 \in \{0,1\}} \sum_{x_2 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{x_M \in \{0,1\}} \exp(-\beta E_{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_M)) \quad (11)$$

で与えられる。このとき、

$$\frac{\partial \ln p_B^{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_M)}{\partial w_{ij}} = \beta (x_i x_j - \langle x_i x_j \rangle_{\text{net}}) \quad (12)$$

が成り立つことを示せ。ただし,

$$\langle x_i x_j \rangle_{\text{net}} = \sum_{x_1 \in \{0,1\}} \sum_{x_2 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{x_M \in \{0,1\}} x_i x_j p_B^{\text{net}}(x_1, x_2, \dots, x_M) \quad (13)$$

とする。

(エ) 一般的にボルツマンマシンにおける重みの更新は,

$$\Delta w_{ij} = \eta (\langle x_i x_j \rangle_{\text{data}} - \langle x_i x_j \rangle_{\text{net}}) \quad (14)$$

を用いて、現在の重み  $w_{ij}$  を新たな重み  $w_{ij} + \Delta w_{ij}$  に変更することで行われる。ここで、 $\eta$  は学習率、 $\langle x_i x_j \rangle_{\text{data}}$  は学習データセット全体にわたる  $x_i$  と  $x_j$  の積の期待値である。式(14)における第一項は、ヘブ則としばしば比較される。この項がどのようにヘブ則の考え方と関連しているかを述べよ。

[ II - 3 ]

静電容量結合型電極を用いることで、心臓の電氣的活動を反映する心電図を、胸部の皮膚表面に金属電極を貼り付けることなく、衣服の上から計測することができる。この計測法は、導電体である生体と金属電極の間に、絶縁体である衣服の生地を介在させることによって形成される静電容量結合を利用してゐる。静電容量結合型電極を用いた心電図計測に関する以下の問に答えよ。なお、以下では、時刻を $t$ 、虚数単位を $j$ 、角周波数を $\omega$ とする。また、使用されるオペアンプの入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロ、帯域幅は無限大、仮想短絡により反転入力端子の電圧と非反転入力端子の電圧は等しいとする。

(問1) 図1は生体を矢状面から見た模式図である。この図に示すように、生体と着用した衣服の生地と、その生地の外側に設置された金属電極による層構造は、並行平板コンデンサとみなすことができる。このときの並行平板コンデンサの静電容量 $C_e$ を求めよ。なお、真空の誘電率を $\epsilon_0$ 、生地比誘電率を $\epsilon_r$ 、生地の厚みを $d$ 、並行平板コンデンサの面積を $S$ とする。

(問2) 図2は生体に対し、静電容量結合型電極を用いた心電図計測をする際の入力段の等価回路である。この回路への入力電圧を $v_h(t)$ 、出力電圧を $v_m(t)$ 、静電容量結合型電極の静電容量を $C_e$ 、入力段の入力インピーダンスのコンデンサ成分の静電容量を $C_{in}$ 、抵抗成分の抵抗値を $R_{in}$ とする。ここでは、入力段の出力インピーダンスは十分に小さく無視できるものとする。また、生体の表面には電圧の基準となるグラウンド(GND)電極が貼付されており、生体とGND電極間のインピーダンスは十分に小さく無視できるものとする。このとき、次の問に答えよ。

(ア) この回路の入出力間の周波数伝達関数 $H_m(j\omega)$ を求めよ。

(イ) (ア)で求めた $H_m(j\omega)$ について、 $C_{in}$ が $C_e$ と比較して十分に小さく、 $R_{in}$ が十分に大きい場合、利得 $|H_m(j\omega)| \cong 1$ とみなせることを示せ。

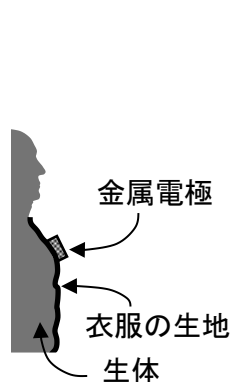


図1

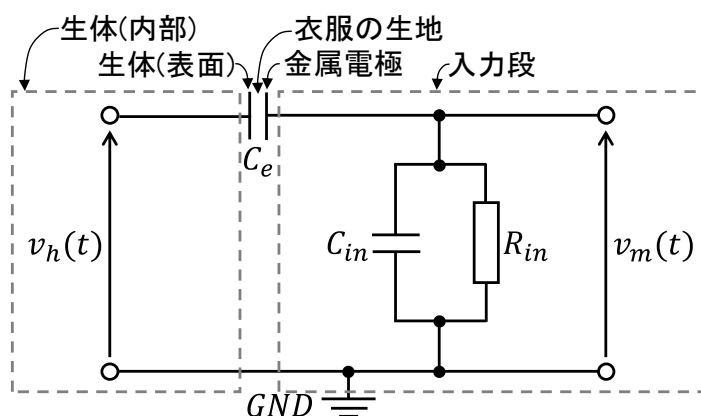


図2

(次のページに続く)

(問 3) 図 3 は、図 2 に示した等価回路の  $v_m(t)$  を計測するための回路である。この回路の入力電圧を  $v_{i1}(t)$ 、出力電圧を  $v_{o1}(t)$ 、 $R_1 = R$ 、 $R_2 = 2R$ 、 $C_1 = C_2 = C$  とするとき、次の問に答えよ。

(ア) この回路の入出力間の周波数伝達関数  $H_1(j\omega)$  を求めよ。

(イ) (ア) で求めた  $H_1(j\omega)$  について、ナイキスト角周波数を  $\omega_N$ 、 $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}RC}$  ( $0 < \omega_c \ll \omega_N$ ) とするとき、横軸と縦軸をそれぞれ角周波数  $\omega$  と利得  $|H_1(j\omega)|$  の両対数表示として、 $0 < \omega \leq \omega_N$  の範囲における周波数特性の概形を図示し、この回路の役割を述べよ。なお、 $\log_{10} 2 \cong 0.3$  としてよい。

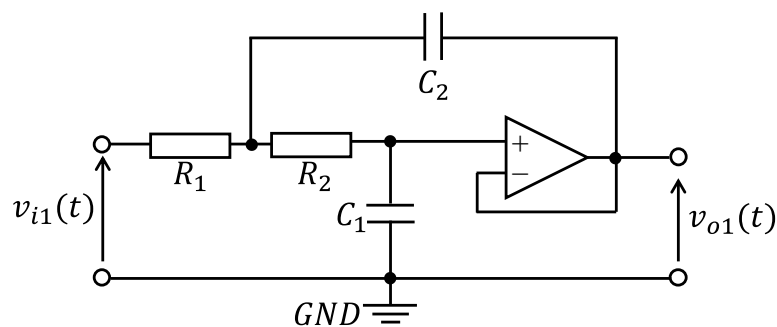


図 3

(問 4) 図 4 は、図 3 に示す回路の出力電圧  $v_{o1}(t)$  を計測するための回路である。この回路の入力電圧を  $v_{i2}(t)$ 、出力電圧を  $v_{o2}(t)$  とするとき、次の問に答えよ。

(ア) この回路の入出力間の周波数伝達関数  $H_2(j\omega)$  を求めよ。

(イ) (ア) で求めた  $H_2(j\omega)$  について、利得  $|H_2(j\omega)|$  に着目して、この回路が  $v_{i2}(t)$  に果たす役割を述べよ。

(ウ)  $v_{o2}(t)$  に含まれる周波数成分のうち、最も高い成分が 100 Hz であるとする。  $v_{o2}(t)$  をアナログ・デジタル変換する際、情報を失わずに変換するために最低限必要となる標準化周波数を答えよ。

(エ)  $v_{o2}(t)$  をアナログ・デジタル変換した場合に、エイリアシングノイズと量子化ノイズが観測されたとする。図 3 に示す回路、図 4 に示す回路を用いて、これらのノイズを低減する方法を答えよ。

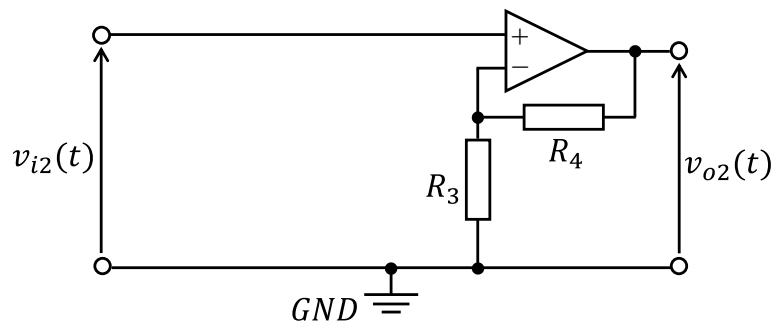


図 4