生体システム工学Ｉ

次の［Ｉ－ 1］～［Ｉ－ 3］の３題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

［Ｉ－ 1］

(1)　$y(x)$ に関する微分方程式,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2 - y \qquad ①$$

について，以下の問に答えよ．

(a)　$y \neq 0$ のとき，$z = \dfrac{1}{y}$ とおいて，式①を $z(x)$ に関する微分方程式に変換せよ．

(b)　式①の一般解 $y(x)$ を求めよ．

(2)　$y(x)$ に関する微分方程式,

$$x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 2\ln(x) - 1 \qquad ②$$

について，以下の問に答えよ．ただし，$x > 0$ とする．

(a)　$t = \ln(x)$ とおいて，式②を $y(t)$ に関する微分方程式に変換せよ．

(b)　式②の一般解 $y(x)$ を求めよ．

(3)　$x(t)$，$y(t)$ に関する連立微分方程式,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y + t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - y \end{cases} \qquad ③$$

について，以下の問に答えよ．

(a)　式③から $y(t)$ を消去し，$x(t)$ の 2 階の微分方程式に変形せよ．

(b)　式③の一般解 $x(t)$ を求めよ．

(c)　式③の一般解 $y(t)$ を求めよ．

(4)　3 次元空間における任意の 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を考える．これらによってベクトル $\vec{V}$ を,

$$\vec{V} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \qquad ④$$

と定義する．また，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ を互いに直交する単位ベクトルとする．以下の問に答えよ．

(a)　$\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{i})$ を $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ の線形和の形で表せ．

(b)　$\vec{a} \cdot \vec{V}$ を求めよ．

(c)　ある実数 m，n に対して,

$$\vec{V} = m\vec{a} + n(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - n(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \qquad ⑤$$

が成り立つ．このとき，m，n を求めよ．

［Ｉ－ 2］

図１のように，左側にある鉛直な壁から，十分に長いまっすぐな棒が水平に突き出ている．この棒は２つの球Ａおよび B の中心を貫通しており，これらの球と棒の間には摩擦がないものとする．また，これらの球の大きさは無視できるとし，各球の運動を水平な棒に拘束された１次元の質点の運動として扱う．球同士の衝突および球と壁の衝突は，すべて完全弾性衝突とする．球の位置を表す座標として水平右方向に x 軸をとり，壁面の位置を $x = 0$ とする．初期状態 (図 1(a)) において，質量 $m > 0$ の球Ａは，位置 x_1 に静止している．一方，質量 M ($M \gg m$) の球Ｂは $x > x_1$ の位置 x にあり，速度 $V_0 < 0$ で x 軸の負方向に動いている．球Ｂは球Ａに近づいて衝突し，その後，球Ａは壁に衝突して跳ね返り (図 1(b) の状態から図 1(c) の状態への遷移)，再び球Ｂと衝突する．このように，球Ａが，球Ｂと壁に交互に衝突する過程が繰り返される．球Ａと球Ｂの n 回目の衝突が生じる位置を x_n とし，球Ａと球Ｂの n 回目の衝突直後の速度をそれぞれ v_n および V_n とする．また，球Ａが壁と n 回目に衝突した直後の速度を v'_n とする．球同士の衝突の最大回数を N とし，N 回目の衝突を最後に球同士の衝突は生じない．以下では，$n < N$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

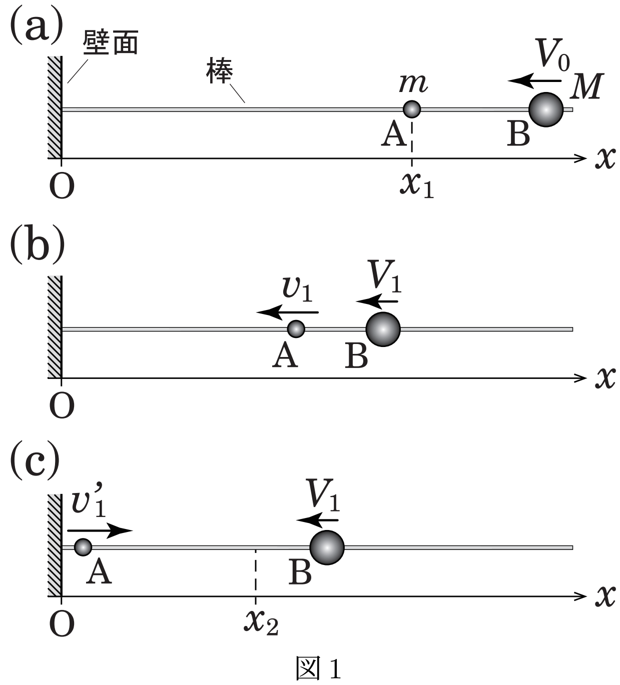

図１

（問１）　球Ａと球Ｂの１回目の衝突直後の速度 v_1 および V_1 を求めよ．

（問２）　$v_n + V_n = v_{n+1} - V_{n+1}$ が成り立つことを示せ．

（問３）　x_n と x_{n+1} の関係を

$$x_{n+1} = F_n\, x_n$$

と表すとき，F_n を，v_n および V_n を用いた式で表せ．

（問４）　$x_n\,(v_n - V_n)$ が一定であることを示せ．

（問５）　n' 回目の球同士の衝突において，球Ｂが壁に最も近づくとする．このとき，$V_{n'} = 0$ と近似できるとして，球同士の衝突位置 $x_{n'}$ を，x_1，m および M を用いた式で表せ．

（次のページに続く）

（問 6）　以下では，(v_n, V_n) を，

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{m}\, v_n \\ U_n = \sqrt{M}\, V_n \end{cases}$$

と変数変換した新たな状態変数 (u_n, U_n) を用いて，この系の振る舞いを考える．図 2(a) に例示するように，(u_n, U_n) を座標平面上の点として描くとき，その点はエネルギー保存則により定められる円周 C 上に位置する．例えば，$n = 0$ の初期状態 $(u_0, U_0) = \left(0, \sqrt{M}\, V_0\right)$ は，図 2(a) の点 P_0 に位置する．その後，球 A と球 B の最初の衝突直後に，系の状態は点 P_1 に移り，さらに球 A が壁と衝突した直後に点 P'_1 に移る．一般に，P_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は球同士の衝突直後の状態，P'_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は球 A と壁との衝突直後の状態に対応する．以下では，この系の状態点の遷移

$$\mathrm{P}_0 \mapsto \mathrm{P}_1 \mapsto \mathrm{P}'_1 \mapsto \mathrm{P}_2 \mapsto \mathrm{P}'_2 \mapsto \cdots \mapsto \mathrm{P}'_{N-1} \mapsto \mathrm{P}_N$$

に見られる幾何学的特徴に注目する．

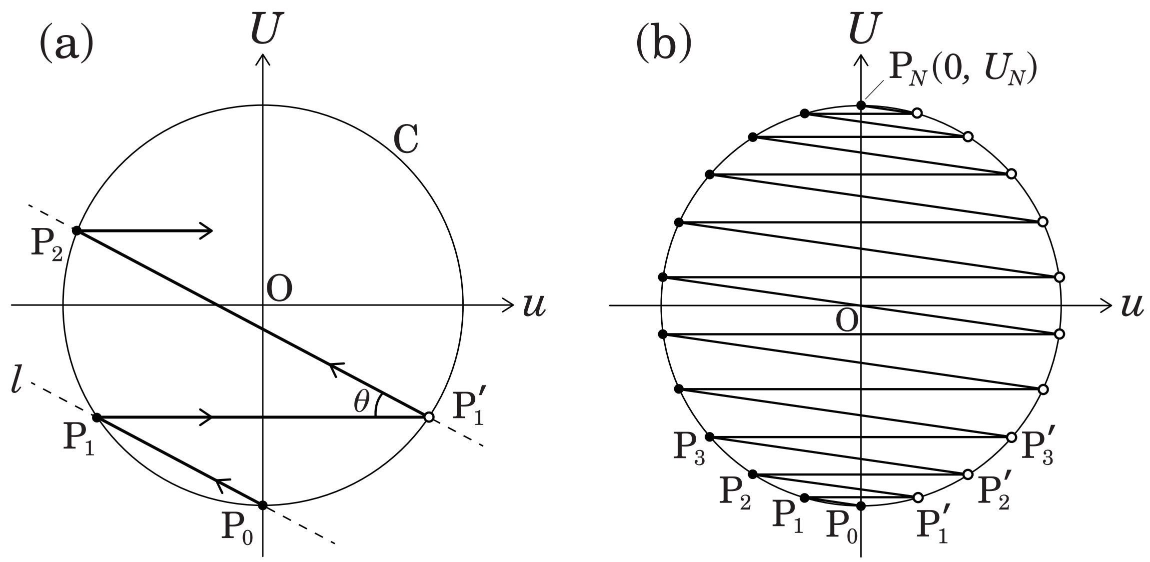

図 2

（ア）　u_N と U_N について，球同士の N 回目の衝突以降，再び衝突が起こることがない条件を示し，その理由を説明せよ．

（イ）　図 2(a) に示した 2 点 P_0，P_1 を通る直線 l の傾きを求めよ．

（ウ）　図 2(a) に示した角 $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}'_1\mathrm{P}_2$ の大きさ θ を求めよ．

（エ）　状態点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots$ は，円周 C 上を一定の回転角で右周りに移動している．1 回あたりの回転角 $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ の大きさを，m および M を用いた式で表せ．

（オ）　図 2(b) のように，球同士の N 回目の衝突直後において，系の状態が $(0, U_N)$ になると近似する．このとき，N を，m および M を用いた式で表せ．ここでは，$|a| \ll 1$ のとき，$\arctan a \approx a$ と近似しても良い．

［Ｉ－３］

周期 T_s で標本化された無限長の離散信号 $x[n]$ $(n = -\infty, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \infty)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を式 (1) で定義する．ここで，ω は角周波数，$j^2 = -1$ である．

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\omega n T_s) \tag{1}$$

また，無限長の離散信号 $x_0[n]$, $x_1[n]$, $x_2[n]$ を，それぞれ，式 (2), (3), (4) で表し，
各々のフーリエ変換を $X_0(\omega)$, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ とする．

$$x_0[n] = \begin{cases} 1 & , \quad n = \quad 0 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & , \quad n = -1, 0, 1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & , \quad n = -1 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad n = \quad 1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

以下の問に答えよ．
(問 1)　$X_0(\omega)$, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ を求めよ．
(問 2)　$X_0(\omega)$, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ の実部，ならびに，虚部の周波数特性を図示せよ．

T_s で標本化された無限長の離散信号 $h[n]$ と $x[n]$ の畳み込み $y[n]$ は式 (5) で与えられる．

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\, x[m] \tag{5}$$

以下の問に答えよ．
(問 3)　$x_0[n]$ と $x_1[n]$, $x_0[n]$ と $x_2[n]$, $x_1[n]$ と $x_2[n]$ の各々の畳み込み，$y_{01}[n]$, $y_{02}[n]$, $y_{12}[n]$ を求めよ．
(問 4)　式 (5) における $y[n]$, $h[n]$, $x[n]$ をフーリエ変換した結果を，各々，$Y(\omega)$, $H(\omega)$, $X(\omega)$ とする時，式 (6) が成り立つことを示せ．

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) \tag{6}$$

(問 5)　$y_{01}[n]$, $y_{02}[n]$, $y_{12}[n]$ のフーリエ変換を求めよ．