

生体システム工学 II

次の [II - 1]~[II - 3] の 3 題を、それぞれ別の解答用紙に答えよ。

[II - 1]

時刻 t における値が式 (1) で定義される信号 $x(t)$ を考える。ただし、 T は正の実定数である。

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -T \\ 1, & -T \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (1)$$

以下の問に答えよ。

(問 1) E_t を式 (2) で定義する。 E_t を求めよ。

$$E_t = \int_{-\infty}^{\infty} \{x(t)\}^2 dt \quad (2)$$

関数 $f(t)$ の t に関するフーリエ変換を式 (3) で定義する。

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

ここで、 ω は角周波数、 j は虚数単位である。

(問 2) $x(t)$ の t に関するフーリエ変換を $X(\omega)$ とする。 $X(\omega)$ を求めよ。

(問 3) $P(\omega)$ を式 (4) で定義する。 $P(\omega)$ を求めよ。

$$P(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (4)$$

(問 4) 式 (5) の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta = \pi \quad (5)$$

(問 5) E_ω を式 (6) で定義する。 E_ω を求めよ。また、 E_ω と E_t の関係を示せ。

$$E_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega \quad (6)$$

$C(\tau)$ を式 (7) で定義する。ただし、 τ は実数である。

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt \quad (7)$$

(問 6) $C(\tau)$ を求めよ。また、横軸を τ 、縦軸を $C(\tau)$ として、 $C(\tau)$ の概形を描け。

(問 7) $C(\tau)$ の τ に関するフーリエ変換を $G(\omega)$ とする。 $G(\omega)$ を求めよ。

[II - 2]

次の微分方程式は、神経細胞における活動電位の生成を定性的に説明するモデルである。

$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{v^3}{3} - w + I_{\text{ext}} \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\tau} (v + a - bw) \quad (2)$$

ここで、 t は時間である。 v は細胞膜電位、 w は膜の不応性に対応する変数である。 I_{ext} は外部からの刺激電流に対応するパラメータである。 a , b , および τ は正の定数である。ただし、

$$I_{\text{ext}} < \frac{a}{b}, \quad 0 < b < 1 \quad (3)$$

とする。以下では、このモデルの振る舞いについて考える。

モデルの状態点は (v, w) である。式 (1) および式 (2) で、 $\frac{dv}{dt}$ が 0 となる状態点の集合を v -ヌルクライン、 $\frac{dw}{dt}$ が 0 となる状態点の集合を w -ヌルクラインと呼ぶ。

(問 1) v -ヌルクラインを表す方程式と w -ヌルクラインを表す方程式を、それぞれ示せ。

(問 2) v -ヌルクラインと w -ヌルクラインの交点がモデルの平衡点である。式 (3) を満たす時、モデルの平衡点は唯一つ存在し、その平衡点は $v-w$ 平面上の左半面 ($v < 0$) に位置することを示せ。

(問 3) モデルの平衡点を (\bar{v}, \bar{w}) とする。 I_{ext} の値によって、 \bar{v} がどのように変化するかを論ぜよ。

モデルの平衡点は一つしか存在しないので、 $v-w$ 平面はモデルの二つのヌルクラインにより四つの領域に分割される (図 1)。図 1 に示すように、領域 A を v -ヌルクラインの上方かつ w -ヌルクラインの左方、領域 B を v -ヌルクラインの下方かつ w -ヌルクラインの左方、領域 C を v -ヌルクラインの下方かつ w -ヌルクラインの右方、領域 D を v -ヌルクラインの上方かつ w -ヌルクラインの右方と定義する。

(問 4) 領域 A, 領域 B, 領域 C, および領域 D それぞれにおける $\frac{dv}{dt}$ と $\frac{dw}{dt}$ の符号の組み合わせを、(i) - (iv) から選べ。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{dv}{dt} > 0, \quad \frac{dw}{dt} > 0 & \text{(ii)} \quad & \frac{dv}{dt} < 0, \quad \frac{dw}{dt} > 0 \\ \text{(iii)} \quad & \frac{dv}{dt} > 0, \quad \frac{dw}{dt} < 0 & \text{(iv)} \quad & \frac{dv}{dt} < 0, \quad \frac{dw}{dt} < 0 \end{aligned}$$

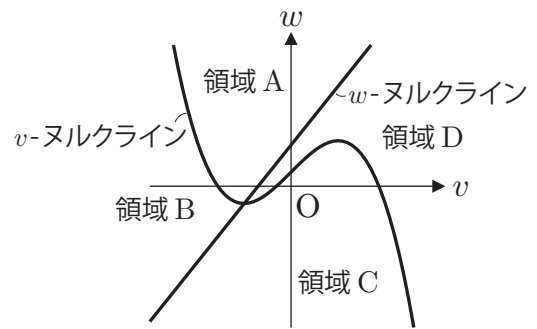


図 1: モデルのヌルクラインと、ヌルクラインによって分割された $v-w$ 平面の例。

(問5) 平衡点近傍におけるモデルの振る舞いを考える. モデルの状態点 (v, w) を, 平衡点 (\bar{v}, \bar{w}) および平衡点からの微小なずれ (x, y) を用いて以下のように表す.

$$v = \bar{v} + x \quad (4)$$

$$w = \bar{w} + y \quad (5)$$

これらを式 (1) および式 (2) に代入することで, x と y が従う微分方程式を, それぞれ $x, y, \bar{v}, \bar{w}, a, b, \tau$, および I_{ext} のうち必要なものを用いて表せ.

(問6) x の 2 次以上の項を無視できるとすると, (問5) で求めた x と y が従う微分方程式は式 (6) で書ける.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6)$$

$m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}$, および $m_{2,2}$ を求めよ.

以下では, $\tau = 12.5$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ とする.

(問7) $\bar{v} = -1$ である場合の I_{ext} を I'_{ext} とする. I'_{ext} を求めよ. また, この場合の平衡点の安定性を判別せよ.

(問8) $\bar{v} = -0.5$ である場合の I_{ext} を I^*_{ext} とする. I^*_{ext} を求めよ. また, この場合の平衡点の安定性を判別せよ.

(問9) I_{ext} が I'_{ext} の場合と I^*_{ext} の場合, 式 (1) および式 (2) の微分方程式は大域的には有界安定であり, なおかつ安定なアトラクタは一つしかないことがわかっている. $t = 0$ において, $(v, w) = (0, 0)$ とする. I_{ext} が I'_{ext} の場合と I^*_{ext} の場合のそれぞれにおいて, モデルがどのように振る舞うのかを説明せよ.

[II - 3]

ヒトの立位姿勢は、静かに立っているときでも、前後左右に微小に変動する。この変動は重心動揺と呼ばれる。床反力計を用いて重心動揺を計測する場合、計測対象者は図 1 左のように、直方体様の形状をもつ床反力計の支持面 (上面) の中央辺りに立ち、静かに立位姿勢を維持する。床反力計は、内蔵された複数の力覚センサを用いて、支持面から足裏に作用する床反力とモーメントを計測する。図 1 右は床反力計の模式図である。床反力計の 4 つの角には 3 軸力覚センサが内蔵されており、それぞれ力覚センサ i ($i = 1, 2, 3, 4$) とする。図 1 に示すように床反力計は水平な床面に設置されており、床面と接する床反力計の底面に固定された $x - y - z$ 座標系を考える。このとき、床反力計の支持面は床面 ($x - y$ 平面) と平行である。 $x - y - z$ 座標系における力覚センサ i の位置ベクトル \vec{p}_i 、および重心動揺の計測中に力覚センサ i で計測される力ベクトル \vec{f}_i を、それぞれ、

$$\vec{p}_i = \begin{pmatrix} p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ p_{i,z} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_i = \begin{pmatrix} f_{i,x} \\ f_{i,y} \\ f_{i,z} \end{pmatrix}$$

とする。

また、支持面から足裏に作用する力の総和 \vec{F} 、および $x - y - z$ 座標系の原点周りの総和モーメント \vec{M} を、それぞれ、

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{f}_i \quad (1)$$

および

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^4 \vec{p}_i \times \vec{f}_i \quad (2)$$

となる。以上をまとめると、重心動揺を計測する際に床反力計により計測されるデータは、 \vec{f}_i 、 \vec{M} 、 \vec{F} である。重心動揺計測中の総合力 \vec{F} の作用点 (力の重心点) は足圧中心点 (Center of Pressure; CoP) と呼ばれる。 $x - y - z$ 座標系に対する CoP の座標を $(x_{\text{CoP}}, y_{\text{CoP}}, c)$ とする。ここで c は床反力計の $x - y - z$ 座標系の原点から支持面までの高さを表す定数である。

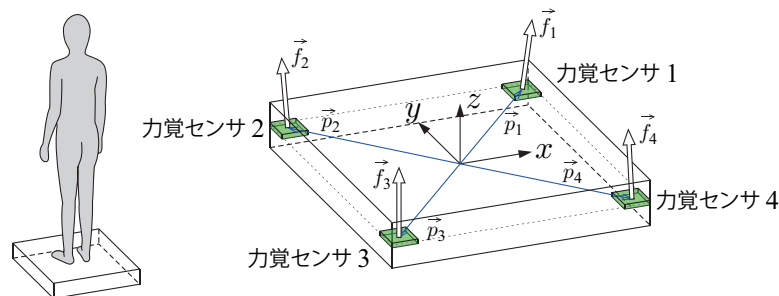


図 1: 左: 床反力計による重心動揺計測の様子。右: 床反力計の模式図。

(問 1) 重心動揺計測中の \vec{f}_i , \vec{M} , \vec{F} は時々刻々と変化するが, 以下の等式は常に成り立つ. その理由を説明せよ.

$$\sum_{i=1}^4 \left\{ - \begin{pmatrix} x_{\text{CoP}} \\ y_{\text{CoP}} \\ c \end{pmatrix} + \vec{p}_i \right\} \times \vec{f}_i = - \begin{pmatrix} x_{\text{CoP}} \\ y_{\text{CoP}} \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} \quad (3)$$

なお, τ はフリーモーメントと呼ばれる床反力計と足裏に生じる摩擦力に起因する鉛直軸周りのトルクであるが, CoP 座標の変動は τ の値を特定することなく計測できる.

(問 2) 足圧中心の水平方向位置 x_{CoP} および y_{CoP} を M_x , M_y , M_z , F_x , F_y , F_z , c の内, 必要なものを用いて表せ.

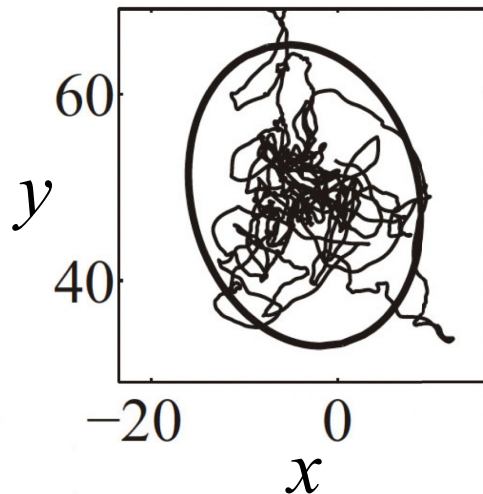


図 2: CoP の前後左右方向の変動軌跡の一例. 軌跡の上に描かれた楕円は, $(x_{\text{CoP},t}, y_{\text{CoP},t})$ 時系列データ点の 95% を含み, 重心動揺の空間的大きさと向きを表す.

さて, 床反力計を用いて, 静止立位時の CoP の経時変化を計測したところ, 図 2 のようなデータが得られた. 得られた時系列データを

$$X = \begin{pmatrix} x_{\text{CoP},1} & y_{\text{CoP},1} \\ x_{\text{CoP},2} & y_{\text{CoP},2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{\text{CoP},t} & y_{\text{CoP},t} \\ \vdots & \vdots \\ x_{\text{CoP},N} & y_{\text{CoP},N} \end{pmatrix} \quad (4)$$

とする. ここで, $x_{\text{CoP},t}$, $y_{\text{CoP},t}$ は, サンプル時刻 $t = 1, 2, \dots, N$ における x_{CoP} および y_{CoP} の値である. 以下では, CoP の床反力計支持面上の $x - y$ 座標成分の分布を主成分分析で特徴付けることを考える.

(問3) X の平均ベクトル \bar{X} は

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_{\text{CoP},t}, \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_{\text{CoP},t} \right) \quad (5)$$

と書ける. 同様に, 共分散行列 V (標本分散) を成分で書き下せ.

(問4) 共分散行列 V の固有値・固有ベクトルを用いて, CoP の変動軌跡の第 1 および第 2 主成分を解析する方法を詳しく説明せよ.

(問5) CoP 変動の計測データが以下のように与えられたとする.

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & -5 \\ 5 & 0 \\ 5 & 10 \\ -5 & 20 \\ 0 & 10 \\ 5 & 10 \\ 0 & 5 \\ 5 & -5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$x_{\text{CoP},t}$ および $y_{\text{CoP},t}$ の平均値を計算し, 平均を零にシフトした時系列を作成し, その軌道を $x - y$ 平面上に描け. 次に, 平均を零にシフトした時系列の共分散行列を計算せよ. さらに, (問4) で解答した方法に基づく計算を概算で行い, 得られた結果に基づいて, $x - y$ 平面にこの時系列の第 1 および第 2 主成分軸を書き加えよ.