

生体システム工学 II

次の [II - 1] ~ [II - 3] の 3 題を、それぞれ別の解答用紙に答えよ。

[II - 1]

以下の問いに答えよ。

(問 1) 電荷も電流もない真空の xyz 空間において、時間 t とともに変化する電場を \mathbf{E} 、磁場を \mathbf{H} とする。このとき、マクスウェルの方程式は以下で記述される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率であり、 μ_0 は真空の透磁率である。 ∇ は以下に示すナブラ演算子である。

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(ア) 式 (1)-(4) の物理的意味を、それぞれ述べよ。

(イ) 三次元列ベクトル $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$ (ここで T はベクトルの転置を表す) およびスカラ量 ϕ を考える。ここで、 \mathbf{r} および ϕ は x , y , および z の関数であり、二階の偏導関数が存在して連続であるとする。以下の (a)-(c) の等式が成立することを示せ。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) = 0 \\ \text{(b)} \quad & \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0} \\ \text{(c)} \quad & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{r} \end{aligned}$$

(ウ) 以下に示す、電荷も電流もない真空中における電場の波動方程式を導出せよ。

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

(次のページに続く)

(問 2) 以下では、電荷も電流もない真空の xyz 空間の x 軸上を進む電磁波があり、電磁波の電場 \mathbf{E} は y 軸方向に振動しているとする。この場合、 \mathbf{E} は空間的に x だけの関数になり、 \mathbf{E} の y 成分 $E_y(x, t)$ に関する波動方程式は以下で記述される。

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x, t) \quad (5)$$

(ア) 式 (5) の一般解は、2 つの任意関数 f と g を用いて以下のように書くことができる。

$$E_y(x, t) = f\left(x - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} t\right) + g\left(x + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} t\right) \quad (6)$$

以下に示す 2 つの変数 $u(x, t)$ と $v(x, t)$ を導入し、式 (6) の $E_y(x, t)$ が式 (5) の解であることを示せ。

$$u(x, t) = x - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} t, \quad v(x, t) = x + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} t$$

- (イ) x 軸の正の向きに進行する電磁波を進行波と呼ぶことにする。式 (6) 右辺の第一項は進行波を表し、第二項は後退波を表す。なぜ、第一項が進行波を表すのかを説明せよ。
- (ウ) この電磁波の電場の y 成分 $E_y(x, t)$ が以下に示す単純な余弦波であるとする。

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left\{ k \left(x - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} t \right) + \theta \right\}$$

ここで、 E_0 , k , および θ は正の定数である。この電磁波の磁場 \mathbf{H} の x 成分 H_x , y 成分 H_y , および z 成分 H_z を求めよ。ただし、磁場の各成分を振動の 1 周期にわたって平均した値は 0 であるとする。

- (エ) xyz 空間に (問 2)(ウ) で考えた電磁波の電場および磁場の概形を描き、電磁波の進行する様子を図示せよ。

[II - 2]

図1(a)のように、長さ ℓ の重さを無視できる、たわみの無い糸の先 (点 A) に、半径 r 、質量 m の円環をつける。円環は円周部分にのみ一様に質量が分布しており、半径方向の厚みは無視できるとする。糸が y 軸となす角を θ 、円環の重心位置を $G(x_G, y_G)$ 、線分 AG が y 軸となす角を ϕ とする。角度は反時計回りの方向を正にとる。糸の張力を T とする。重力加速度の大きさを g とする。この糸が、 x 軸を水平方向、 y 軸を鉛直下向きにとった鉛直面内で、わずかに振動する運動について考える。以下では、 $|\theta|$ および $|\phi|$ は十分小さく、 $\sin \theta = \theta$ 、 $\cos \theta = 1$ 、 $\sin \phi = \phi$ 、 $\cos \phi = 1$ と近似できるとする。以下の問いに答えよ。

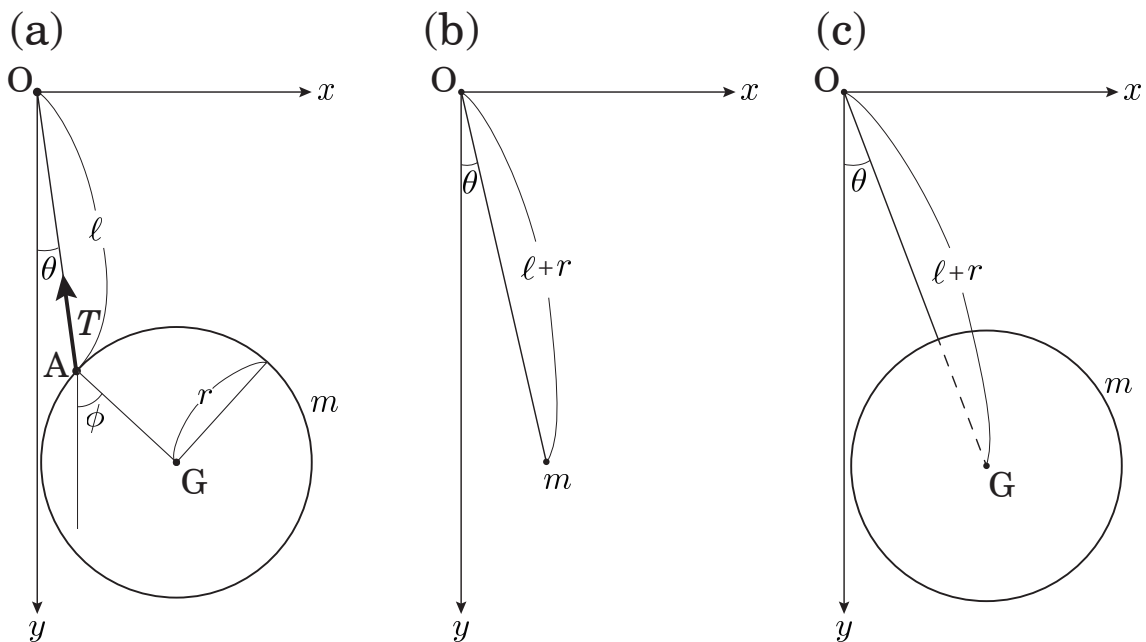


図 1: (a) 糸の先に円環が取り付けられた振子. (b) 単振子. (c) 剛体振子.

(問 1) r が ℓ に対して十分小さく、円環部分を質点として近似できるとする (図 1(b)). すなわち、長さ $\ell+r$ の糸の先に質量 m の質点がついた単振子を考える。このとき、振動周期 τ_1 を求めよ。

(問 2) ここでは、図 1(c) のように、糸の部分と円環全体を単一の剛体振子として近似する。すなわち、 $\theta = \phi$ と近似する。

(次のページに続く)

(ア) 点 O まわりの剛体振子の慣性モーメントを求めよ.

(イ) 剛体振子の振動周期 τ_2 を求めよ.

(ウ) r が l に対して小さいとして, τ_2 を r/l について展開する. 以下の $\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$ に入る値を求めよ.

$$\tau_2 = \tau_1 \left(1 + \boxed{\text{あ}} \left(\frac{r}{l} \right)^2 + \boxed{\text{い}} \left(\frac{r}{l} \right)^3 + \dots \right)$$

(問3) ここからは, 点 O を回転軸とする振動に加えて, 点 A を回転軸として円環も振動する場合を考える. θ , ϕ が十分小さいので, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\phi}{dt}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\frac{d^2\phi}{dt^2}$ についても 1 次の項だけで近似できるとする. さらに, θ および ϕ の解として, それぞれ,

$$\theta = \alpha \cos(\omega t + q)$$

$$\phi = \beta \cos(\omega t + q)$$

を仮定する. ここで, α , β , ω , q は定数である.

(ア) 円環の重心位置 $G(x_G, y_G)$ が従う運動方程式を, m , g , θ , T , および, t を用いて表せ.

(イ) 円環の重心 G まわりの回転について ϕ が従う運動方程式を, m , r , θ , ϕ , T , および, t を用いて表せ.

(ウ) ω が満たす条件式を, ω , l , r , および, g を用いて表せ.

(エ) この系の基準振動の周期を τ とする. $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ であることに注意して, τ を求めよ.

(オ) この系の基準振動の周期の中で最も長い周期を τ_3 とする. r が l に対して小さいとして, τ_3 を r/l について展開する. このとき, 以下の $\boxed{\text{う}}$, $\boxed{\text{え}}$ に入る値を求めよ.

$$\tau_3 = \tau_1 \left(1 + \boxed{\text{う}} \left(\frac{r}{l} \right)^2 + \boxed{\text{え}} \left(\frac{r}{l} \right)^3 + \dots \right)$$

(カ) τ_1 , τ_2 , および, τ_3 の関係から分かることを説明せよ.

[II - 3]

A と B の 2 つのモードからなるハイブリッドシステムを考える．このシステムの時刻 t における状態は， x - y 平面上の点 $(x(t), y(t))$ で表されるとする．システムのモードは，時刻あるいは x - y 平面上における状態点の位置に依存して切り替わる．システムがモード A である場合のダイナミクスと，システムがモード B である場合のダイナミクスは，それぞれ式 (1) および式 (2) で記述される．

$$\text{モード A} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

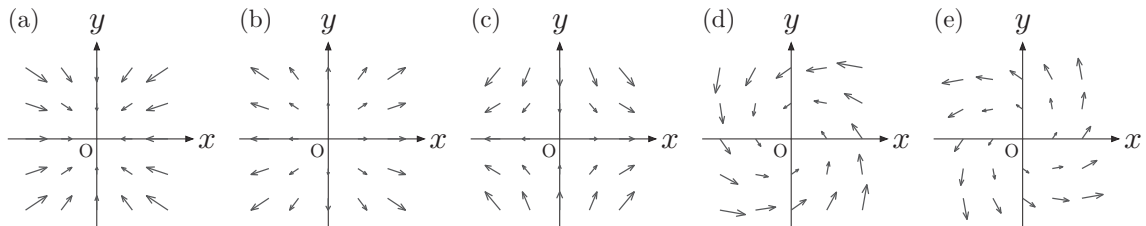
$$\text{モード B} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M}_B \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし， α ， ω ，および γ は正の定数であるとする．以下の問いに答えよ．

(問 1) システムのモードが時刻に依存して切り替わる場合を考える．

(ア) 式 (1) の行列 \mathbf{M}_A の固有値，および式 (2) の行列 \mathbf{M}_B の固有値をそれぞれ求めよ．

(イ) 式 (1) で記述されるモード A のベクトル場を可視化した様子として最も適切なものを，以下の (a)-(e) から選べ．また，式 (2) で記述されるモード B のベクトル場を可視化した様子として最も適切なものを，以下の (a)-(e) から選べ．ただし，各図中の O は原点を表す．



(ウ) $t = 0$ において， $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とする． $t = 0$ から $t = \tilde{t}$ ($\tilde{t} > 0$) までの間，システムはモード A であるとする． $t = \tilde{t}$ における状態点の位置 $(x(\tilde{t}), y(\tilde{t}))$ を (\tilde{x}, \tilde{y}) と書くことにする． \tilde{x} および \tilde{y} を α ， ω ，および \tilde{t} を用いて表せ．

(エ) $t = \tilde{t}$ となった瞬間に，システムはモード A からモード B へ切り替わり， $t = \tilde{t}$ 以降，システムはモード B であるとする． $t = T$ ($T > \tilde{t}$) における状態点の位置 $(x(T), y(T))$ を， \tilde{x} ， \tilde{y} ， γ ， \tilde{t} ，および T のうち必要なものを用いて表せ．

(オ) (問 1)(ウ) および (エ) で考えた状態点の移動に関して， $t = \tilde{t}$ 以降に状態点が原点へ漸近するために \tilde{t} が満たすべき条件を述べよ．必要ならば，非負の整数 n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を用いよ．

(次のページに続く)

(問2) (問1) ではシステムのモードが時刻に依存して切り替わる場合を考えたが、以下ではシステムのモードが x - y 平面上における状態点の位置に依存して切り替わる場合を考える。図1のように、 x - y 平面が原点 O を通る2本の直線 l_1 と l_2 で4つの領域に分割されているとする。直線 l_1 は x 軸から θ_1 傾いた直線であり、直線 l_2 は x 軸から θ_2 傾いた直線である。ただし、 $\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ とする。直線 l_1 と l_2 で分割された4つの領域のうち図1で灰色で示された2つの領域はモード A に割り当てられ、状態点がこれらの領域に位置するときシステムはモード A であるとする。残りの2つの領域はモード B に割り当てられ、状態点がこれらの領域に位置するときシステムはモード B であるとする。状態点がモード A の領域を移動してどちらかの直線へ到達した際には、システムはモード A からモード B へ切り替わる。同様に、状態点がモード B の領域を移動してどちらかの直線へ到達した際には、システムはモード B からモード A へ切り替わる。

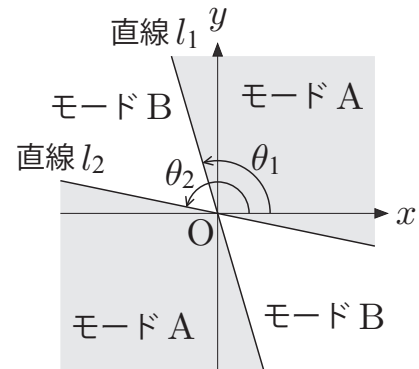


図1: システムの状態点の x - y 平面上における位置とモードの関係。

- (ア) $t = 0$ において、 $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とする。この点はモード A に割り当てられた領域にあるので、状態点は式 (1) に従って移動する。 $t > 0$ において、状態点が直線 l_1 あるいは直線 l_2 へ初めて到達する時刻を t_1 とする。 t_1 を求めよ。また、 $t = t_1$ における状態点の位置 $(x(t_1), y(t_1))$ を求めよ。
- (イ) (問2)(ア) で求めた t_1 における状態点の位置を (x_1, y_1) と書くことにする。状態点が直線 l_1 あるいは l_2 に到達したため、システムはモード A からモード B に切り替わり、状態点は式 (2) に従ってモード B に割り当てられた領域を移動する。状態点が次に直線 l_1 あるいは直線 l_2 へ到達する時刻を t_2 とする。 t_2 を求めよ。また、 $t = t_2$ における状態点の位置 $(x(t_2), y(t_2))$ を求めよ。
- (ウ) (問2)(イ) で求めた t_2 における状態点の位置を (x_2, y_2) と書くことにする。状態点が直線 l_1 あるいは l_2 に到達したため、システムはモード B からモード A に切り替わり、状態点は式 (1) に従ってモード A に割り当てられた領域を移動する。状態点が次に直線 l_1 あるいは直線 l_2 へ到達する時刻を t_3 とする。 t_3 を求めよ。また、 $t = t_3$ における状態点の位置 $(x(t_3), y(t_3))$ を求めよ。
- (エ) このハイブリッドシステムにおいて、 x - y 平面上の原点 O が安定な平衡点であるために θ_1 と θ_2 の間で満たされるべき条件を求めよ。