

## 生体システム工学 I

次の [I - 1] ~ [I - 3] の 3 題を、それぞれ別の解答用紙に答えよ。

[I - 1]

以下の問に答えよ。

(問 1) ある壁面の基準点からの距離に、経年変化による設計値からのずれが生じているかどうか確認する実験を考える (図 1)。基準点から壁面までの距離は、設計上では 5000 mm とされている。基準点から壁面までの距離は、距離センサを用いて計測する。この距離センサの測定精度は、距離には依存せず標準偏差 2 mm の正規分布に従い、測定のたびに独立な誤差を含む測定値が得られるとする。標準正規分布に従う確率変数を  $Z$  としたとき  $P(Z > 1.96) \simeq 0.025$ ,  $\sqrt{2\pi} \simeq 2.5$  と近似できるものとする。ここで、 $P(Z > z)$  は  $Z > z$  となる確率を表す。次の (ア) から (エ) に答えよ。



図 1: 基準点からの距離計測

- (ア) この実験で得られる測定距離を確率変数  $X$  と表す。  $X$  の期待値を 5000 mm として、  $X$  が従う確率密度関数を表せ。
- (イ) 1 回の計測で得られた距離の測定値が 4997 mm だったとする。現在の壁面までの距離の 95% 信頼区間を求めよ。
- (ウ) (イ) の測定値を用いて設計値からのずれの有無に関する統計的検定を行う。帰無仮説と対立仮説を明記し、有意水準 5% のもとで検定せよ。
- (エ) (ウ) の結果を考察せよ。
- (問 2) (問 1) と同じ測定を  $n$  回繰り返すことを考える。次の (ア) から (エ) に答えよ。
- (ア)  $i$  回目の測定で得られる測定距離を確率変数  $X_i$  と表す ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。  $X_i$  の期待値が全ての  $i$  に対して 5000 mm であるとして、  $n$  回の測定結果の標本平均を表す確率変数を  $\bar{X}$  とする。  $\bar{X}$  が従う確率密度関数を表せ。
- (イ)  $n = 4$  として 4 回の測定で得られた距離が 4998, 4997, 4994, 4996 mm だったとする。現在の壁面までの距離の推定値とその 95% 信頼区間を求めよ。
- (ウ) 設計値からのずれの有無に関して統計的検定を行う。帰無仮説と対立仮説を明記し、有意水準 5% のもとで検定せよ。
- (エ) (ウ) の結果と (問 1) の検定結果を比べて、言えることを述べよ。

(次のページに続く)

(問3) 図2のように  $x$ - $y$  平面に置かれた壁面を考える。(問1) で用いたものと同じセンサを4つ用意し,  $x$  軸上に1 m 間隔で配置する. ただし, 左端のセンサは  $x$  軸の原点から1 m の位置にあるとする. 各センサから壁面までの  $y$  軸方向の距離を測定することで, 壁面の歪みの有無を確認する実験を考える. 壁面が完全な平面であり測定距離に誤差がなければ測定点は直線上に乗ることを利用して, 検定により現在の壁面が非平面であると結論づけたい. 自由度2のカイ自乗分布に従う確率変数を  $W$  とするとき  $P(W > 5.99) \simeq 0.05$  と近似しても良い. 次の(ア)から(ウ)に答えよ.

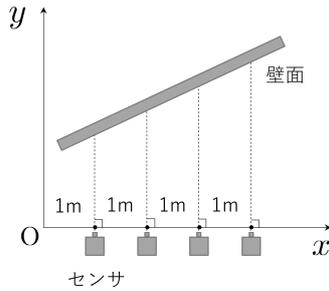


図2: 複数箇所からの距離計測

- (ア) 4点の測定距離が左側から順に 5002, 5217, 5417, 5603 mm だったとする. 最小二乗法により4点にもっとも良く当てはまる直線の方程式を求めよ.
- (イ) 測定結果を用いて測定対象の壁面が非平面であるかどうかを検定により調べる. 帰無仮説と対立仮説を明記し, 有意水準5%のもとで検定せよ.
- (ウ) 検定結果から得られる結論を述べよ.

[ I - 2 ]

神経軸索の長軸方向の膜電位分布の時間変化をケーブル方程式を用いて考える．図1はケーブル方程式の等価電気回路である．この図のように，直線的なケーブルに沿って1次元空間内の位置を表す  $x$  軸を設定する．位置  $x$  における外部導体および内部導体の電位を，それぞれ， $V_{out}(x)$  および  $V_{in}(x)$  とする．ケーブル上の区間  $[x, x + \Delta x]$  からなる微小ケーブルの外部導体および内部導体を  $x$  軸方向に流れる電流を，それぞれ， $I_{out}(x)$  および  $I_{in}(x)$  とする．また， $I_{out}(x)$  および  $I_{in}(x)$  に対する微小ケーブルの電気抵抗を，それぞれ， $r_{out}\Delta x$  および  $r_{in}\Delta x$  とする．外部導体と内部導体の存在により，ケーブルはコンデンサ的な性質も示す．図には，区間  $[x, x + \Delta x]$  の微小ケーブルの外部導体内および内部導体内を流れる電流と，微小ケーブルの内部導体から外部導体に流れる電流（膜電流） $I_m(x)\Delta x$  の関係も示した． $c_m\Delta x$  および  $r_m/\Delta x$  は，それぞれ，微小ケーブルの静電容量および動径方向電流に対する微小ケーブルの電気抵抗を表す．次の問に答えよ．

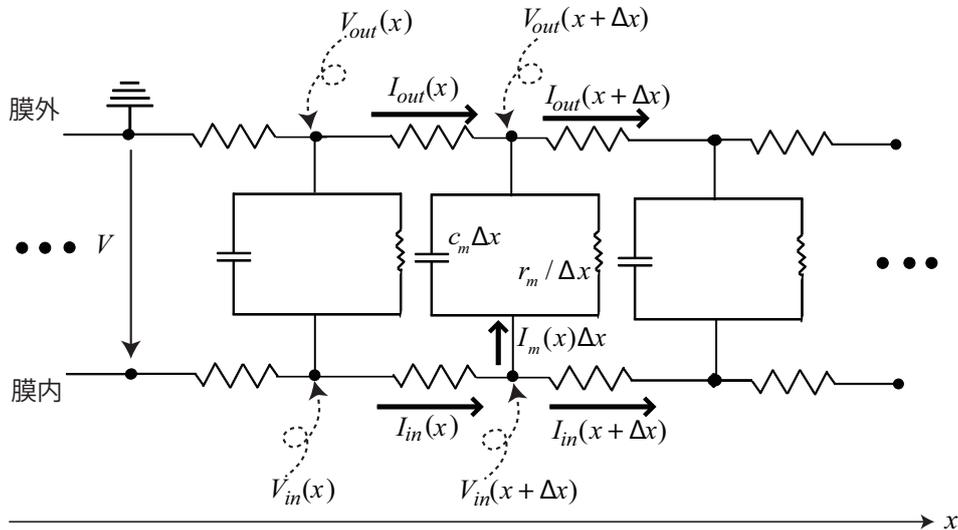


図 1: ケーブル方程式の等価電気回路

(問 1) 微小ケーブルの電気抵抗  $r_{out}\Delta x$ ， $r_{in}\Delta x$ ， $r_m/\Delta x$ ，および，微小ケーブルの静電容量  $c_m\Delta x$  に関して， $r_{out}$ ， $r_{in}$ ， $r_m$ ，および  $c_m$  の単位を答えよ．なお，長さの単位は m とする．

(次のページに続く)

(問2) 以下の小問 (ア) から (ウ) の誘導に沿って次の式 (1) を導出せよ.

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = (r_{in} + r_{out})I_m(x, t) \quad (1)$$

ここで,

$$V(x, t) = V_{in}(x, t) - V_{out}(x, t) \quad (2)$$

は, 時刻  $t$ , 位置  $x$  におけるケーブルの内部導体と外部導体間の電位差 (膜電位) である.

(ア) 次の2つの方程式を導け.

$$-\frac{\partial V_{in}(x, t)}{\partial x} = r_{in}I_{in}(x, t), \quad -\frac{\partial V_{out}(x, t)}{\partial x} = r_{out}I_{out}(x, t) \quad (3)$$

(イ) 次の2つの方程式を導け.

$$-\frac{\partial I_{in}(x, t)}{\partial x} = I_m(x, t), \quad \frac{\partial I_{out}(x, t)}{\partial x} = I_m(x, t) \quad (4)$$

(ウ) (ア) と (イ) の結果から, 題意の式 (1) を導け.

(問3) 膜電流が満たす次式を導け.

$$I_m(x, t) = \frac{1}{r_m}V(x, t) + c_m \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \quad (5)$$

(問4) (問2) と (問3) の結果を用いて, 以下のケーブル方程式を導け.

$$\tau \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - \lambda^2 \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) = 0 \quad (6)$$

ここで,

$$\lambda = \sqrt{\frac{r_m}{r_{in} + r_{out}}}, \quad \tau = c_m r_m \quad (7)$$

である.

(次のページに続く)

(問5) 無限 ( $-\infty < x < \infty$ ) に広がるケーブルを考える. 時刻  $t = 0$  の初期状態が, ディラックのデルタ関数を用いて,

$$V(x, 0) = A\delta(x) \quad (8)$$

のように与えられたとする. 以下の小問に沿って,  $V(x, t)$  を求めよ.

(ア)  $V(x, t)$  の空間に関するフーリエ変換および逆フーリエ変換は,

$$\hat{V}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x, t)e^{-jkx} dx, \quad V(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(k, t)e^{jkx} dk \quad (9)$$

と書ける. ここで,  $j$  は虚数単位,  $k$  は空間角周波数である. 式 (6) の両辺をフーリエ変換し, かつ  $x = \pm\infty$  において次の境界条件

$$\left. \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm\infty} = 0, \quad V(x, t)|_{x=\pm\infty} = 0 \quad (10)$$

が成り立つとして, 式 (6) の左辺第 2 項を部分積分することで,  $\hat{V}(k, t)$  が満たすべき時間に関する 1 階の常微分方程式を導け.

(イ) 式 (8) に対して  $\hat{V}(k, 0)$  を求めよ.

(ウ) (イ) の結果を用いて, (ア) で導いた常微分方程式の解  $\hat{V}(k, t)$  を求めよ.

(エ)  $\hat{V}(k, t)$  を逆フーリエ変換することで, 式 (6) の解  $V(x, t)$  を求めよ.

(オ) 式 (1) と (エ) で求めた  $V(x, t)$  を用いて, 適当な時刻を仮定して, その時刻における膜電流  $I_m(x, t)$  の空間分布, すなわち, 膜電流の向きと大きさの空間分布を図示すると共に, 膜電流がケーブル上で閉回路を形成している様子を簡潔に描写, 説明せよ.

[ I - 3 ]

以下の問に答えよ。

(問 1) 5 V 単電源で動作するオペアンプ (図 1) において, 反転入力 (-)  $V_I$  を 0 から 5 V まで単調増加させた。出力  $V_D$  と  $V_I$  の静特性を表す図を描け。非反転入力 (+)  $V_R$  は 0 より大きく 5 V 未満の一定値であり, オペアンプの入力インピーダンスは無限大, 出力インピーダンスは零とする。

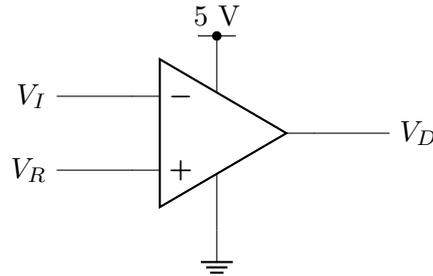


図 1

(問 2)  $R$  と  $R/2$  の値を有する抵抗, NOT 素子, NAND 素子, 図 1 のオペアンプ等から構成される図 2 の回路を考える。NOT, NAND 素子の Low (0), High (1) レベルは, 各々, 0, 5 V に相当する。

- (ア)  $V_A$  を 0 から 5 V まで単調増加させた時の  $V_{D0}$ ,  $V_{D1}$ ,  $V_{D2}$ ,  $V_{D3}$  と  $V_A$  の各静特性を図示せよ。
- (イ)  $V_A$  を 0 から 5 V まで十分ゆっくりと増加させた時,  $B_1$  と  $B_0$  の各値の変化を Low (0), High (1) レベルで答えよ。
- (ウ) 図 2 の回路の機能を記せ。

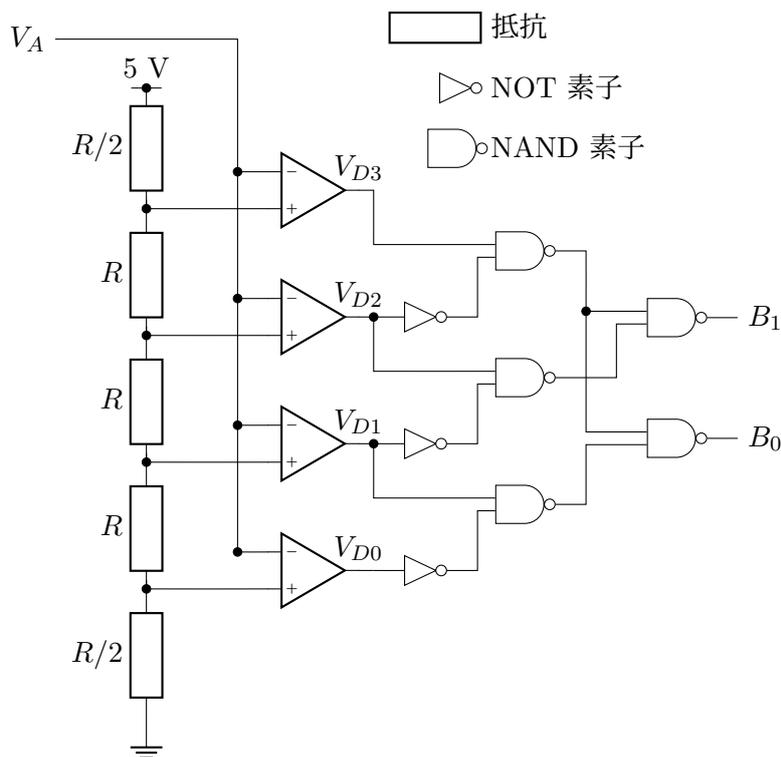


図 2