

生体システム工学 II

次の [II - 1] ~ [II - 3] の 3 題を、それぞれ別の解答用紙に答えよ。

[II - 1]

フェルマーの原理によると、2点を通る光はその間の可能な経路のうち要する時間が最短となる経路を通るという。この原理を用いて、媒質中における光路を導出することを考える。真空中の光速を c とし、以下の問に答えよ。

(問 1) 図 1 に示すように、 x - y 平面上の各点 (x, y) に非一様な屈折率 $n(x, y)$ の媒質が分布し、光が媒質中の点 $P_1(x_1, y_1)$ から出発し点 $P_2(x_2, y_2)$ に至るとする。ただし、関数 $y(x)$ の導関数を $y' = \frac{dy}{dx}$ とする。

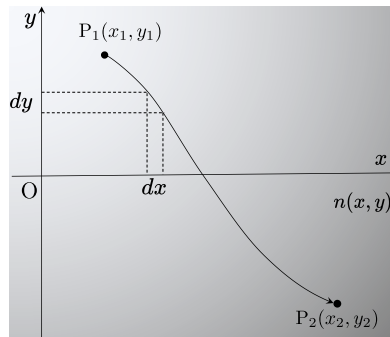


図 1: 屈折率が非一様な媒質中における光路の例

(ア) 光が曲線 $y = y(x)$ 上を通るのに要する時間を T とする。 T は、

$$T = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx \quad (1)$$

の形で表すことができる。このとき

$$L(x, y, y') = \frac{n(x, y)}{c} \sqrt{1 + y'^2} \quad (2)$$

であることを示せ。

(イ) フェルマーの原理により T が最小となるとき光路を $y = \bar{y}(x)$ とする。ここで、 $h(x_1) = 0$ および $h(x_2) = 0$ を満たす任意の関数 $h(x)$ 、微小量 ϵ を用いて、光路を $y(x) = \bar{y}(x) + \epsilon h(x)$ と表すとき、 ϵ の微小変化に対して T は停留値を取る。

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x) \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} \right\} dx = 0 \quad (3)$$

が成り立つことを示せ。

(ウ) 任意の関数 $h(x)$ に対して式 (3) が恒等的に成り立つためには、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

が成立しなければならない。屈折率を一様、すなわち $n(x, y) = n_0$ (定数) とするとき、本問におけるオイラー・ラグランジュ方程式を解き、その解が点 P_1 、 P_2 を通る直線となることを示せ。

(次のページに続く)

〔II - 1〕の続き

(問2) 図2のように、 x - y 平面上の各点 (x, y) に一様な屈折率をもつ2種類の媒質1および媒質2が、 $x = x_0$ を境にして分布しているとする。光は媒質1中の点 $P_1(x_1, y_1)$ から出発し、境界上の点 $(x_0, 0)$ で屈折し、媒質2中の点 $P_2(x_2, y_2)$ に至るとする。この光路を $y = y(x)$ とし、関数 $y(x)$ の導関数を $y' = \frac{dy}{dx}$ とする。媒質1および媒質2の屈折率は、それぞれ n_1 (定数) および n_2 (定数) であり、入射角を θ_1 、屈折角を θ_2 とする。ただし、 $x_1 < x_0 < x_2$ 、 $y_1 > 0$ 、 $y_2 < 0$ とする。

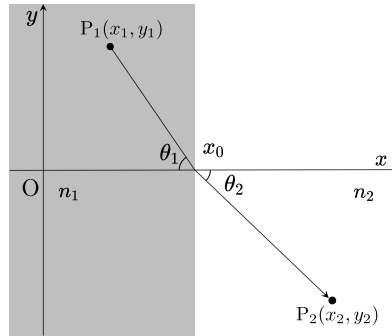


図2: 一様な屈折率をもつ2種類の媒質中の光路

(ア) $\sin \theta_1$ を $x_1 < x < x_0$ における y' を用いて表わせ。

(イ) 光が点 P_1 から点 P_2 に至るまでに要する時間を T とする。 T を c 、 n_1 、 n_2 、 x_0 、 x_1 、 x_2 、 x 、 y' を用いて表わせ。

(ウ) オイラー・ラグランジュ方程式からスネルの法則

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (5)$$

を導出せよ。

[II - 2]

100₂ は、2 進数の 100 を表す。以下の問に答えよ。

(問 1) 次の方程式中の b_i を全て求めよ。ただし、 b_i は 0 または 1 の値をとる。

(ア) $112 = \sum_{i=-3}^8 b_i \times 2^i$

(イ) $2.375 = \sum_{i=-3}^8 b_i \times 2^i$

(ウ) $10000000.11_2 = \sum_{i=-3}^8 b_i \times 2^i$

(問 2) IEEE754 は、コンピュータ内で扱われる実数の表現法に関する規格である。この規格の単精度浮動小数点を用いた表現では、実数は 32 ビットのビット列で表される。実数値からビット列への変換過程においては、実数値は式 (1) のように表現される。

$$(-1)^s \left(1 + \sum_{j=1}^{23} b_j \times 2^{-j} \right) \times 2^p \tag{1}$$

ただし、 $s, b_j (j = 1, 2, \dots, 23)$ は、それぞれ 0 または 1 の 2 値変数、 p は -125 から 128 の整数である。 $(-1)^s$ の部分、 2^p の部分、それ以外の部分は、それぞれ 1 ビットの符号部、8 ビットの指数部、23 ビットの仮数部へと変換される。

各部のビット列への変換方法は次の通りである。符号部は、正負をそれぞれ 0, 1 で表わす。仮数部は、整数桁が 1 になるように小数点位置を決め、それに合わせて指数部を定める。これを正規化と呼ぶ。必ず 1 になる整数桁は省略して、少数桁の $b_1 b_2 \dots b_{23}$ がメモリ内に格納される。指数部では、指数 p を

$$p = \left(\sum_{i=1}^8 p_i \times 2^{(8-i)} \right) - 127 \tag{2}$$

と表現し、 $p_1 p_2 \dots p_8$ が格納される。ただし、 $p_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ は 0 か 1 の 2 値変数である。式 (1) では 0 を表すことができないので、IEEE754 では 0 の表現法を別途定めている。

例えば、32.25 は、 $32.25 = 2^5 + 2^{-2} = (-1)^0(1 + 2^{-7}) \times 2^5$ と表せることから、符号部は 0、仮数部は $1 + 2^{-7} = 1.0000001_2$ 、指数部は $5 + 127 = 132 = 10000100_2$ である。これらを 32 ビットのビット列で表すと 0100 0010 0000 0001 0000 0000 0000 0000 となる (表 1 参照)。

表 1: IEEE754 単精度浮動小数点におけるビット配列

各部	符号部	指数部	仮数部
ビット数	1	8	23
ビット列	s	$p_1 p_2 \dots p_8$	$b_1 b_2 \dots b_{23}$
32.25 のビット列	0	100 0010 0	000 0001 0000 0000 0000 0000

(ア) -2.375 を式 (1) の形で書き表したときの $s, b_j (j = 1, 2, \dots, 23), p$ を求めよ。

(イ) -2.375 を IEEE754 の単精度浮動小数点のビット列で表せ。

(ウ) IEEE754 の単精度浮動小数点のビット列 0100 0010 0011 0111 0110 0000 0000 0000 を 10 進数で表せ。

(次のページに続く)

〔II - 2〕の続き

(問3) IEEE754 の単精度浮動小数点どうしの演算では、演算の度に結果が正規化されるため、下位ビットの打ち切りや、正規化により下位ビットに0が補填される事を考慮する必要がある。

(ア) 単精度浮動小数点として表現された3つの数 $x = 1.1001_2 \times 2^{16}$, $y = 1.1000_2 \times 2^{16}$, $z = 1.0000_2 \times 2^{-8}$ を考える。このとき

$$(x - y) + z \quad (3)$$

および

$$x - (y - z) \quad (4)$$

をコンピュータの演算順序に従って計算するものとする。計算過程において単精度浮動小数点による表現が維持されるものとして、それぞれの計算結果を2進数で表わせ。また、これらの結果が異なる理由を説明せよ。

(イ) 単精度浮動小数点として表現された3つの数 $x = 1.0_2 \times 2^{12}$, $y = 10_2$, $z = 1.0_2$ を考える。このとき

$$xy \left(\sqrt{x^2 + z} - x \right) \quad (5)$$

をコンピュータの演算順序に従って計算するものとする。計算過程において単精度浮動小数点による表現が維持されるものとして、計算結果を2進数で表わせ。また、 y および z の値が反映されるよう式変形（演算順序を変更）し、そのときの計算結果を示せ。

[II - 3]

図1(a)に示すモデルが鉛直面内で行う二足歩行様の運動を考える．このモデルは，大きさが無視できる質量 m の質点と，質量が無視できる2本の直線的棒状剛体リンク（リンク A およびリンク B）から構成される．リンク A とリンク B の長さを共に h とする．リンク A とリンク B の上端は摩擦のない1軸ジョイントで質点と連結されている．このジョイントは股関節的な役割を果たす．このモデルをコンパスモデルと呼ぶ．鉛直面には一次元的地面（水平線）が無限遠まで延びており，その上に x 軸，および x 軸と直交する鉛直上向きに y 軸を設定する（図1(b))．コンパスモデルは，この xy 平面内の地面（ x 軸）の上を歩行する．歩行中のコンパスモデルでは，常にどちらか片側のみのリンクの下端が地面に接地しており，もう片側のリンクの下端は地面から離れている．接地しているリンクを支持脚，地面から離れているリンクを遊脚と呼ぶ．支持脚が地面上を滑ることはなく，まるで接地点に1軸ジョイントがあるかのように接地点周りに回転運動を行う．接地点周りの回転には摩擦は無く，この回転運動によるエネルギー損失は無いものとする．後述する適当な条件が満たされると，遊脚が接地して新たに支持脚となり，その瞬間に，それまで支持脚であったリンクは離地して遊脚となる．この過程を繰り返すことでコンパスモデルの歩行様運動が生じる．時刻 t における支持脚と地面のなす角（姿勢）を時計回りに $\theta(t)$ とし，接地点周りの質点の角速度を $\omega(t)$ とする．遊脚は，支持脚から遊脚に切り替わる瞬間を除いて，地面に対して α 傾いた姿勢に保たれるものとする．ここで， α の正の向きは時計回りとし， $0 < \alpha < \pi/2$ とする．質点には y 軸の負の方向に重力が作用する．重力加速度の大きさを g とする．以下の問いに答えよ．

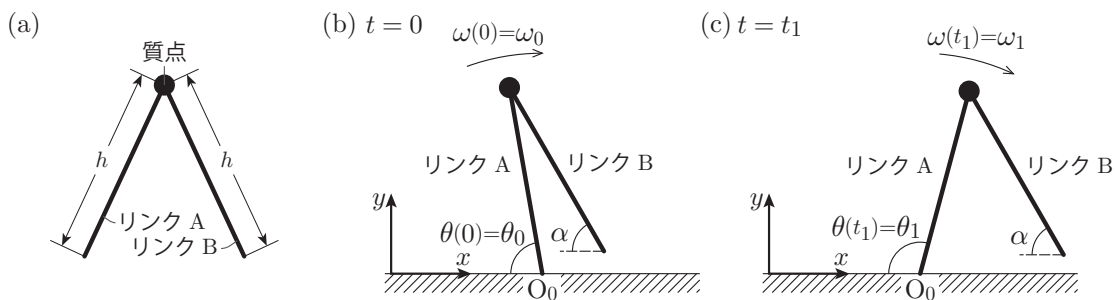


図 1: コンパスモデルの概要と鉛直面 (xy 平面) 内における運動の様子．

(問 1) 図1(b)(c)のように，リンク A が点 O_0 を接地点とする支持脚であり，リンク B が遊脚である場合を考える．図1(b)は，リンク A を支持脚として歩行を開始するコンパスモデルの初期状態であり，時刻 $t = 0$ におけるリンク A の姿勢 $\theta(0) = \theta_0$ は $\alpha < \theta_0 < \pi/2$ を満たし，点 O_0 周りの質点の角速度は $\omega(0) = \omega_0 > 0$ である．図1(c)は，リンク A が支持脚である一連の時間帯の後半のある時刻 $t = t_1$ である．このとき，リンク A の姿勢 $\theta(t_1) = \theta_1$ は $\pi/2 < \theta_1 < \pi - \alpha$ を満たし，点 O_0 周りの質点の角速度は $\omega(t_1) = \omega_1 > 0$ である．

- (ア) コンパスモデルの点 O_0 周りの回転の運動方程式を記せ．ただし，コンパスモデルのリンク A の下端周りの慣性モーメントは mh^2 である．
- (イ) 時刻 $t = 0$ におけるコンパスモデルの位置エネルギーおよび運動エネルギーを， m, g, h, θ_0 ，および ω_0 のうち必要なものを用いて表せ．ただし，位置エネルギーは地面を基準面とせよ．

(次のページに続く)

〔II-3〕の続き

- (ウ) 時刻 $t = 0$ における点 O_0 周りの質点の角速度 ω_0 が、ある臨界角速度 ω_c よりも大きいと、質点は高さ h の最高点に達し、その後、前方へ転倒し、しばらくするとリンク B の下端が地面に衝突（接地）する。一方、もし ω_0 が ω_c よりも小さいと、質点の時計回りの運動は停止し、反時計回りの運動を開始してしまい、コンパスモデルは歩行様運動ができなくなる。臨界角速度 ω_c を、 m, g, h, α , および θ_0 のうち必要なものを用いて表せ。
 - (エ) 時刻 $t = 0$ における点 O_0 周りの質点の角速度 ω_0 が ω_c よりも大きいとする。リンク B の下端が接地する直前の点 O_0 周りの質点の角速度を ω_- とする。 ω_- を、 $m, g, h, \alpha, \theta_0$, および ω_0 のうち必要なものを用いて表せ。
- (問2) コンパスモデルの歩行中に支持脚が遊脚に、遊脚が支持脚に入れ替わる事象を考える。図1(b)の点 O_0 周りの質点の角速度 ω_0 が ω_c より大きく、図1(c)の状況を経て、遊脚であるリンク B の下端が点 O_1 に接地する（図2(a)）。リンク B が接地すると、その瞬間にリンク A の下端は地面から離れ、コンパスモデルはリンク B を支持脚、リンク A を遊脚とする運動を開始する。リンク A は離地の直後に（瞬間的に）地面に対する角度が α になる（図2(b)）。さらに、それ以降もリンク A はその姿勢を保つ（図2(c)）。リンク A のこのような瞬間移動はモデルの設定を簡単にするための仮想的な運動であり、リンク A の姿勢が瞬間的に α に変化する際、リンク A が地面に触れることはなく、また、リンク A のこのような姿勢の変化は質点やリンク B の運動に何の影響も与えないとする。遊脚の接地は完全非弾性衝突で、接地の前後で接地点まわりの角運動量は保存されたとする。

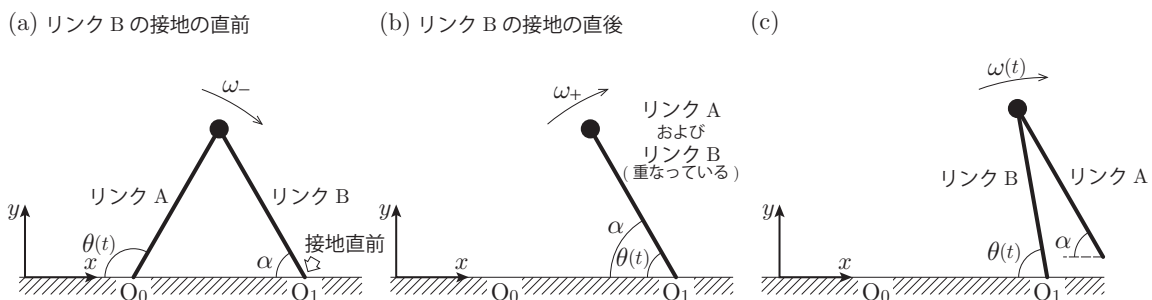


図 2: 歩行中のコンパスモデルの接地および離地の様子。

- (ア) リンク B が接地する直前の点 O_0 周りの質点の角速度は、問1(エ)で求めた ω_- である。このときの質点の速度の x 方向成分 v_x および y 方向成分 v_y を、それぞれ、 h, α , および ω_- を用いて表せ。次に、求めた質点の速度をリンク B に平行な成分 v_p と垂直な成分 v_o に分解し、それぞれ、 h, α , および ω_- を用いて表せ。ただし、 v_p はリンク B の下端から質点に向う方向の速度を正とし、 v_o は質点が時計回りに回転する方向の速度を正とする。
- (イ) リンク B が接地して支持脚になった直後の点 O_1 周りの質点の角速度を ω_+ とする。 ω_+ を ω_- および α を用いて表せ。さらに、リンク B が支持脚になった直後にリンク B が時計回りの運動を開始するために α が満たすべき条件を求めよ。

(次のページに続く)

〔II - 3〕の続き)

- (問3) これまでの設定では、図1(b)が歩行様運動の初期状態であったが、以下では、コンパスモデルの初期状態を再設定し、そこから開始される歩行様運動について考える。時刻 $t = 0$ における新たな初期状態では、リンク A が点 O_0 で地面に接地しており、リンク A の姿勢は $\theta(0) = \alpha$ 、点 O_0 周りの質点の角速度は $\omega(0) = \omega'_0 > 0$ であるとする。 ω'_0 が臨界角速度 ω'_c よりも大きければ、リンク A は時計回りの回転運動を続け、やがてリンク B が接地する。この臨界角速度 ω'_c は、問1(ウ)で求めた ω_c の θ_0 を α に置き換えたものである。以下では、 ω'_0 が ω'_c の2倍 ($\omega'_0 = 2\omega'_c$) であるとする。
- (ア) $\alpha = 3\pi/8$ である場合を考える。時刻 $t > 0$ で、コンパスモデルはどのような運動をし、十分に時間が経過した後どうなるかを、理由と共に詳しく説明せよ。
- (イ) 時刻 $t > 0$ に、コンパスモデルが x 軸の正の方向に歩きながら遊脚が接地した回数を歩数と呼ぶことにする。コンパスモデルの歩数が N 以上であるために、 α が満たすべき条件を求めよ。ただし、 N は2以上の自然数とする。