

生体システム工学 II

次の [II - 1] ~ [II - 3] の 3 題を, それぞれ別の解答用紙に答えよ.

[II - 1]

(問 1) 気体で満たされた閉じた系を考える. 系に入ってくる熱量を $d'Q$, 系の絶対温度の増分を dT として, 定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_p は, それぞれ,

$$C_V \equiv \left(\frac{d'Q}{dT} \right)_V, \quad C_p \equiv \left(\frac{d'Q}{dT} \right)_p$$

により定義される. ここで, V は系の体積, p は圧力を表す. 熱力学の法則に基づき, 以下の問に答えよ.

(ア) 気体の内部エネルギー U が, 絶対温度 T と体積 V の関数 $U = U(T, V)$ であるとき, この系の定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_p が次の式で表されることを示せ.

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad C_p = C_V + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

(イ) 気体が n モルの理想気体であるとき, 定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_p の間に

$$C_p - C_V = nR$$

の関係が成り立つことを示せ. ここで, R は気体定数を表す.

(ウ) 理想気体が準静的な断熱変化をする場合を考える. $\gamma = C_p/C_V$ が絶対温度に依存しない定数であるとき,

$$TV^{\gamma-1} = \text{定数}, \quad pV^\gamma = \text{定数}$$

が成り立つことを示せ.

(エ) (問 1) の (ウ) で考えた断熱条件において,

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}$$

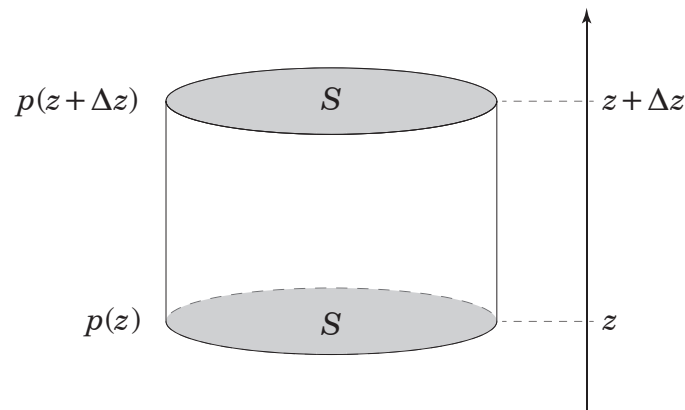
が成り立つことを示せ.

(問 2) 流れが無視できる大気中の圧力について考える．鉛直上向きに z 軸の正の向きをとり，高さ 0 の地表面を $z = 0$ とする．1 モルの大気の質量を M とする．大気は理想気体とみなすことができるものとする．重力加速度の大きさを g とする．以下の問に答えよ．

(ア) 下図のように大気中に仮想的な円柱を考える．円柱の上面と下面は鉛直方向に対して垂直にとり，その面積を S とする．上面と下面の鉛直軸上の位置を，それぞれ $z + \Delta z$, z とする．圧力 p は鉛直方向の高さのみに依存し， $p = p(z)$ とする．大気の密度 ρ は圧力のみに依存し， $\rho = \rho(p(z)) = \rho(z)$ とする． $\Delta z \rightarrow 0$ のとき，

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g$$

となることを導け．



(イ) 地表面における圧力を $p(0) = p_0$ とする．大気中において絶対温度 T が $T = T_0$ で一定とみなせるとき，圧力 $p(z)$ を求めよ．

(ウ) ここでは，絶対温度 T が高さ z の関数である場合を考える．大気が (問 1) の (ウ) で考えた断熱条件を満たし，地表面における圧力を $p(0) = p_0$ ，絶対温度を $T(0) = T_0$ とする．大気の絶対温度 T と高さ z の関係を求めよ．

[II - 2]

系の状態 s が状態 1 ($s = s_1$) あるいは状態 2 ($s = s_2$) のいずれかを確率的にとる離散時間系を考える。離散時刻 n ($n = 0, 1, 2, \dots$) の系の状態 $s(n)$ に関して, $s(n) = s_1$ である確率 $p(s(n) = s_1)$, および $s(n) = s_2$ である確率 $p(s(n) = s_2)$ を, それぞれ, $p_1(n)$ および $p_2(n)$ と表す。時刻 $(n+1)$ に, $s(n+1) = s_1$ である確率 $p_1(n+1)$, および $s(n+1) = s_2$ である確率 $p_2(n+1)$ は, $p_1(n)$ および $p_2(n)$ のみに依存して, 次式で決まるものとする。

$$\begin{cases} p_1(n+1) = \frac{4}{5}p_1(n) + \frac{2}{5}p_2(n), \\ p_2(n+1) = \frac{1}{5}p_1(n) + \frac{3}{5}p_2(n) \end{cases} \quad (1)$$

以下では,

$$p(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

と表し, $p(n)$ の時間発展を考える。式 (1) を

$$p(n+1) = Ap(n) \quad (3)$$

と表す。 A は系の遷移確率行列と呼ばれる。

(問 1) 行列 A の固有値 λ_1 と λ_2 , およびそれぞれに対する固有ベクトル u_1 と u_2 を求めよ。

(問 2) 列ベクトルである u_1 と u_2 を並べた行列

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

を用いることで, 行列 A は

$$A = Q^{-1}AQ \quad (5)$$

のように対角化することができる。ここで, Λ は A を対角化した行列である。式 (5) を用いて, A^n を求めよ。

(問 3) 初期確率 $p(0)$ を,

$$p(0) = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

とする。 $p(n)$ を求めよ。さらに, 十分時間が経過した後に, $s = s_1$ および $s = s_2$ である確率

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) \quad (7)$$

を求めよ。

以下では, 上記の系に対して, 状態遷移毎に予め決められた報酬が与えられる状況を考える。具体的には, 次を示す実数値で表される報酬が与えられるとする。

遷移 $s_1 \rightarrow s_1$ に対する報酬 : r_{11}

遷移 $s_1 \rightarrow s_2$ に対する報酬 : r_{21}

遷移 $s_2 \rightarrow s_1$ に対する報酬 : r_{12}

遷移 $s_2 \rightarrow s_2$ に対する報酬 : r_{22}

(問 4) 時刻 $n = 0$ において, $s(0) = s_1$ であったとする. そこから 1 ステップ進んだときに得られる報酬の期待値 $R_1(0)$ を求めよ. 同様に, $s(0) = s_2$ であったとして, そこから 1 ステップ進んだときに得られる報酬の期待値 $R_2(0)$ を求めよ. 尚, ここで得られた 2 つの期待値を用いて,

$$\mathbf{R}(0) = \begin{pmatrix} R_1(0) \\ R_2(0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

を定義する.

(問 5) $s(0) = s_1$ であったとして, $s(1) = s_1$ である確率と $s(1) = s_2$ である確率をベクトル表示した次式

$$\begin{pmatrix} p(s(1) = s_1 | s(0) = s_1) \\ p(s(1) = s_2 | s(0) = s_1) \end{pmatrix} \quad (9)$$

を A を用いて表せ. その後, さらに 1 ステップ更新する (開始から 2 ステップ目の更新を行う) ことを考える. 2 ステップ目の更新は, $s(1) = s_1$ からなされる場合と $s(1) = s_2$ からなされる場合の 2 通りある. それぞれの場合に対して 2 ステップ目の更新時に得られる報酬の期待値を求めよ. さらに, これら 2 通りの場合の結果を総合して, 2 ステップ目の更新で得られる報酬の期待値 $R_1(1)$ を $R(0)$ を用いて表せ. 同様に, $s(0) = s_2$ であったとして, $s(1) = s_1$ である確率と $s(1) = s_2$ である確率

$$\begin{pmatrix} p(s(1) = s_1 | s(0) = s_2) \\ p(s(1) = s_2 | s(0) = s_2) \end{pmatrix} \quad (10)$$

を A を用いて表せ. その後, さらに 1 ステップ進んだとき, この 2 ステップ目の更新時に得られる報酬の期待値 $R_2(1)$ を $R(0)$ を用いて表せ.

(問 6) $s(0) = s_1$ であったとして, $s(n) = s_1$ である確率と $s(n) = s_2$ である確率

$$\begin{pmatrix} p(s(n) = s_1 | s(0) = s_1) \\ p(s(n) = s_2 | s(0) = s_1) \end{pmatrix} \quad (11)$$

を A を用いて表せ. その後, さらに 1 ステップ進んだとき, この $(n+1)$ ステップ目の更新時に得られる報酬の期待値 $R_1(n)$ を $R(0)$ を用いて表せ. 同様に, $s(0) = s_2$ であったとして, そこから n ステップだけ進んだときに, $s(n) = s_1$ である確率と $s(n) = s_2$ である確率

$$\begin{pmatrix} p(s(n) = s_1 | s(0) = s_2) \\ p(s(n) = s_2 | s(0) = s_2) \end{pmatrix} \quad (12)$$

を A を用いて表せ. その後, さらに 1 ステップ進んだとき, この $(n+1)$ ステップ目の更新時に得られる報酬の期待値 $R_2(n)$ を $R(0)$ を用いて表せ.

(問 7) 期待値 $R_1(n)$ と $R_2(n)$ を用いて

$$\mathbf{R}(n) = \begin{pmatrix} R_1(n) \\ R_2(n) \end{pmatrix} \quad (13)$$

を定義する. $\mathbf{R}(n)$ を $\mathbf{R}(0)$ と A を用いて表せ.

(問 8) (問 6) の過程に対して,

$$V_1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n R_1(n), \quad (14)$$

$$V_2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n R_2(n) \quad (15)$$

を定義する。 V_1 および V_2 は、それぞれ、 $s(0) = s_1$ および $s(0) = s_2$ から状態更新を開始し、それぞれについて、その後、将来に渡って得られる報酬の和の期待値である。ここで、 γ は定数で、 $0 < \gamma < 1$ である。 γ の存在によって、直近の未来に得られる報酬の総和に対する寄与は大きい、遠い未来に得られる報酬の総和に対する寄与は小さい。

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

とする。 $\mathbf{V} = (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{R}(0)$ を示せ。ここで、 \mathbf{A}^T は \mathbf{A} の転置行列、 \mathbf{I} は 2×2 単位行列である。

(問9) $\gamma = 1/2$, $r_{11} = 1$, $r_{21} = 2$, $r_{12} = 1$, $r_{22} = 2$ とする。 \mathbf{V} を求めよ。

[II - 3]

被食者と捕食者の関係にある 2 種の生物の個体数を考える． x および y はそれぞれ時刻 t における被食者および捕食者の個体数であるとし，式 (1) に従うとする．ただし，個体数は非負の実数として扱えるものとし， $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は正の実定数とする．以下の問に答えよ．

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y \end{cases} \quad (1)$$

(問 1) 定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の意味を説明せよ．

(問 2) 時間的に変化しない個体数の組 (x, y) を平衡点と呼ぶ．原点 $(0, 0)$ 以外の平衡点を (\bar{x}, \bar{y}) とする． (\bar{x}, \bar{y}) を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の中から必要なものを用いて表わせ．

(問 3) $x > 0, y > 0$ のとき式 (2) で定義される H が時間的に変化しないことを示せ．ただし， $\log x, \log y$ はそれぞれ x, y の自然対数である．

$$H = \gamma x + \beta y - \delta \log x - \alpha \log y \quad (2)$$

以下では，平衡点 (\bar{x}, \bar{y}) 近傍での各個体数の時間変化について考える．具体的には，時刻 t における (x, y) の平衡点 (\bar{x}, \bar{y}) からの微小なずれを (p, q) とする．このとき被食者および捕食者の個体数は式 (3) で表すことができる．

$$\begin{cases} x = \bar{x} + p \\ y = \bar{y} + q \end{cases} \quad (3)$$

(問 4) 平衡点 (\bar{x}, \bar{y}) 近傍における p, q の時間微分 $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$ を p, q と定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の中から必要なものを用いて表せ．ただし， p, q の二次以上の項は無視せよ．

(問 5) (問 4) で表した方程式を p, q について解け．

(問 6) 被食者数と捕食者数は共通の周期で振動する．その周期を求めよ．

(問 7) 被食者数が極大になった後，最初に捕食者数が極大となるまでの時間を求めよ．

再び，平衡点 (\bar{x}, \bar{y}) 近傍以外を含む一般の場合における各個体数の時間変化について考える．

(問 8) x - y 平面上に複数の解曲線の概形を図示せよ．