生体システム工学 I

次の [I - 1]〜[I - 3] の 3 題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[I - 1]

x-y 平面を水平面とする．x-y 平面を動く 2 自由度マニピュレータを考える (図 1)．マニピュレータは 2 つの棒状剛体リンク (リンク 1 とリンク 2) から構成され，リンク 1 の一端は原点 $\boldsymbol{O}$ に固定された 1 軸ジョイント (関節 1 と呼ぶ) と連結されている．また，リンク 1 のもう一方の端点はリンク 2 の端点と 1 軸ジョイント (関節 2 と呼ぶ) で連結されている．マニピュレータの姿勢は，図 1 に示した関節角

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

によって決まる．x-y 座標系におけるアーム先端の位置を

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

とする．リンク 1 の長さ (関節 1 と関節 2 の距離) を l_1，リンク 2 の長さ (関節 2 とアーム先端の距離) を l_2 とする．

(問 1)　アーム先端の位置 (x, y) を (θ_1, θ_2) を用いて表せ．

(問 2)　関節角が

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

であるような姿勢から，微小角

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

だけ変位させたとする．このときのアーム先端の微小変位を

$$\Delta\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5}$$

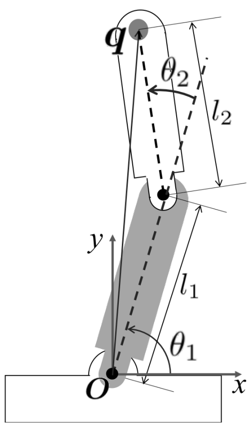

図 1: 2 自由度マニピュレータ

(次のページに続く)

と表す.

$\Delta\boldsymbol{\theta}$ の 2 次以上の微小量を無視すると,

$$\Delta\boldsymbol{q} = J\left(\bar{\boldsymbol{\theta}}\right)\Delta\boldsymbol{\theta} \tag{6}$$

と表せる．行列 $J\left(\bar{\boldsymbol{\theta}}\right)$ を求めよ.

さて，以下では，$\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}}$ の姿勢に静止しているアームの先端に，並進外力

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \tag{7}$$

を加えたときのマニピュレータの力学を考える．関節 1 および関節 2 には，それぞれ，バネ定数 (剛性) k_1 および k_2 の線形回転バネが取り付けられており，関節角の変位に比例した回転軸まわりの復元トルクが生成されるものとする．すなわち，関節角の微小変位 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ に対して,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= -\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta} \\ &\equiv -K\Delta\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{8}$$

で表される復元トルクが生成される．K は関節剛性行列と呼ばれる.

(問 3)　並進外力 $\boldsymbol{F}$ によるアーム先端の微小変位を $\Delta\boldsymbol{q}$ とする．外力がマニピュレータにした仕事 ΔW_F を求めよ．また，アーム先端の微小変位 $\Delta\boldsymbol{q}$ によって生じる関節角の微小変位を $\Delta\boldsymbol{\theta}$ とし，この微小変位が関節 1 および関節 2 に生成する関節トルクを，それぞれ，T_1 および T_2 とし,

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

とする．$\boldsymbol{T}$ が微小変位 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ と共に外部にした仕事 ΔW_T を $\boldsymbol{T}$ を用いて表せ．さらに，$\Delta W_T = \Delta W_F$ であること，および式 (6) を用いることで，$\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{F}$ を用いて表せ.

(問 4)　関節が剛性を持つとき，アーム先端の位置が $\Delta\boldsymbol{q}$ 変位すると，それに比例した復元力が生成される．この復元力は外力 $\boldsymbol{F}$ と釣り合うので,

$$\boldsymbol{F} = -R\Delta\boldsymbol{q} \tag{10}$$

と表せる．行列 R はアーム先端の剛性行列と呼ばれる．(問 3) で求めた $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{F}$ の関係式，式 (8) および式 (6) を参考にして，アーム先端の剛性行列 R を関節剛性行列 K を用いて表せ.

(問 5)　$l_1 = l_2 = 1$ および $k_1 = k_2 = 1$ とする．また，$\bar{\theta}_1 = \pi/6$，$\bar{\theta}_2 = \pi/6$ とする．$J(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ を求めよ．次に，K が単位行列であること，および (問 4) の結果を利用して R^{-1} を求め，さらに R を求めよ.

[I - 2]

図 1 のように，オペアンプ A，インピーダンス素子 Z_i，Z_f から構成される回路を考える．t は時間であり，$i_\mathrm{i}(t)$，$i_\mathrm{f}(t)$ は電流を表す．なお，オペアンプの入力インピーダンスは無限大，出力インピーダンスは 0，オープンループゲインは無限大であり，全て，角周波数 ω に依存しないとする．以下の問いに答えよ．

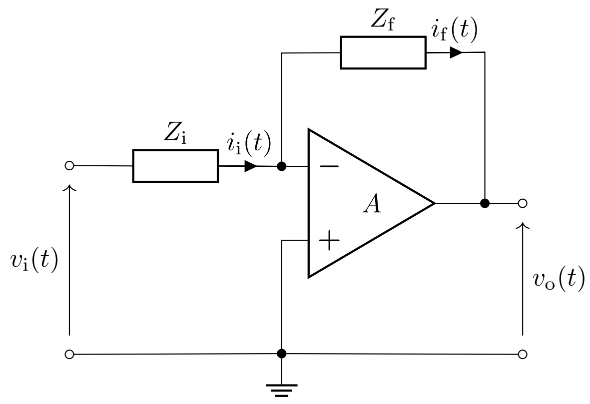

図 1: 回路

(問 1)　入力電圧 $v_\mathrm{i}(t)$ と Z_i を流れる $i_\mathrm{i}(t)$ の関係を求めよ．

(問 2)　$i_\mathrm{i}(t)$ と Z_f を流れる $i_\mathrm{f}(t)$ の関係を求めよ．

(問 3)　出力電圧 $v_\mathrm{o}(t)$ を $v_\mathrm{i}(t)$，Z_i，Z_f 等を用いて表せ．

以下では，$t < 0$ において $v_\mathrm{i}(t) = v_\mathrm{o}(t) = 0$ とする．また，Z_i が抵抗 R_i のみで構成され，Z_f は抵抗 R_f と容量 C_f の並列接続とする．

(問 4)　$t \geqq 0$ における $v_\mathrm{i}(t)$ と $v_\mathrm{o}(t)$ の関係を表す微分方程式を，R_i，R_f，C_f 等を用いて記せ．

(問 5)　$v_\mathrm{i}(t)$ と $v_\mathrm{o}(t)$ のラプラス変換を，各々，$V_\mathrm{i}(s) = \displaystyle\int_0^\infty v_\mathrm{i}(t)\exp(-st)\mathrm{d}t$，$V_\mathrm{o}(s) = \displaystyle\int_0^\infty v_\mathrm{o}(t)\exp(-st)\mathrm{d}t$ とする．s は複素数である．この時，$V_\mathrm{o}(s)/V_\mathrm{i}(s)$ を，R_i，R_f，C_f 等を用いて表せ．

(問 6)　$t \geqq 0$ において，$v_\mathrm{i}(t) = V_A \exp(j\omega t)$ とする．t が十分大きく定常状態に達した時，$v_\mathrm{o}(t) = V_B \exp(j\omega t)$ となる．$|V_B/V_A|$ の周波数特性を図示せよ．なお，$j^2 = -1$ である．

(問 7)

$$v_\mathrm{i}(t) = \begin{cases} 1, & nT \quad \leqq \quad t \quad < \quad \left(n + \dfrac{1}{2}\right)T \\ 0, & \left(n + \dfrac{1}{2}\right)T \quad \leqq \quad t \quad < \quad (n+1)T \end{cases}$$

とする．n は非負の整数である．n が十分大きく定常状態に達した時，下記二条件で $nT \leqq t < (n+1)T$ における $v_\mathrm{o}(t)$ の波形の概観を描け．

(a) $T = 100 C_\mathrm{f} R_\mathrm{f}$，$\dfrac{R_\mathrm{f}}{R_\mathrm{i}} = 1$　　　(b) $T = \dfrac{C_\mathrm{f} R_\mathrm{f}}{100}$，$\dfrac{R_\mathrm{f}}{R_\mathrm{i}} = 100$

[I - 3]

2 次元平面内に置かれたマーカの位置を計測するシステムを考える．マーカの位置に関する情報は図 1 (a) に示すようなカメラを用いて取得する．簡単のため，カメラは光軸方向前方に置かれたマーカの方角 θ のみを計測できるものとする．θ はカメラに固定された u-v 座標系の u 軸方向を 0，v 軸方向を $\pi/2$ として計測される．ただし，ここでは $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ に限られるとする．また，図 1 (b) のように，平面内に複数のマーカ (例えばマーカ 1 およびマーカ 2) が置かれている場合，カメラはそれぞれの方角 (θ_1 および θ_2) を個別に計測できるものとする．カメラが計測できるのはマーカの方角のみであり，カメラとマーカの距離は直接的には計測できない．このため，平面内に設置 (固定) されたカメラの位置および向きが明らかであったとしても，平面に固定された 1 個のマーカを 1 台のカメラで計測するだけでは，平面内におけるマーカの位置を知ることはできない．しかし，複数台のカメラで対象のマーカを同時に計測すれば，適切な計算を行うことにより，平面内におけるマーカの位置を決定できる．

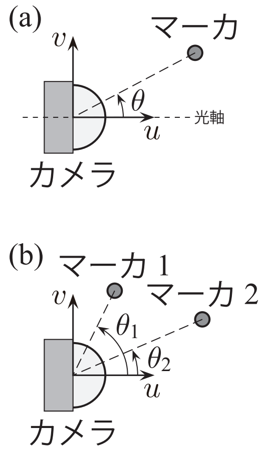

図 1: マーカの方角を計測するカメラ．

図 2 のように，X-Y 平面にカメラを設置し，この平面内に置かれたマーカの位置を計測する場合，u-v 座標系の原点の位置がカメラの位置 (x_o, y_o) である．また，カメラの向きは X-Y 座標系に対する u-v 座標系の角度 ϕ で表される．以下の問いに答えよ．

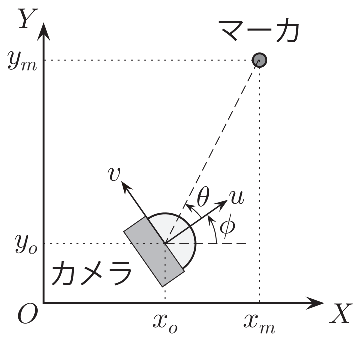

図 2: 1 台のカメラでマーカを計測している様子．

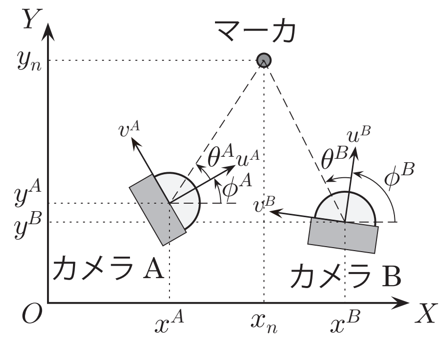

図 3: 2 台のカメラでマーカを計測している様子．

(問 1)　図 2 の状況を考える．この場合，マーカは点 (x_m, y_m) に置かれており，$x_m > x_o$，$y_m > y_o$ である．このカメラで計測されるマーカの方角 θ を，x_m，y_m，x_o，y_o および ϕ のうち必要なものを用いて表せ．

(問 2)　図 3 の状況を考え，2 台のカメラ (カメラ A，カメラ B) で点 (x_n, y_n) に置かれたマーカを計測する．カメラ A は点 (x^A, y^A) に角度 ϕ^A で設置されており，カメラ B は点 (x^B, y^B) に角度 ϕ^B で設置されている．ただし，2 台のカメラとマーカは同一直線上に並んでいない．それぞれのカメラで計測されるマーカの方角は θ^A および θ^B である．

(ア) カメラ A とマーカの距離が d^A であったとする．x_n および y_n を，x^A，y^A，ϕ^A，θ^A および d^A のうち必要なものを用いて表せ．

(イ) (ア) の状況に加えて，カメラ B とマーカの距離が d^B であったとする．(ア) の結果も利用して，未知数 d^A および d^B が満たすべき連立方程式を導け．

(ウ) d^A および d^B を求め，さらに x_n および y_n を求めよ．これらの値は，x^A，y^A，x^B，y^B，ϕ^A，ϕ^B，θ^A および θ^B のうち必要なものを用いて表せ．

(次のページに続く)

ここまでは，便宜上，2 次元平面に X-Y 座標系を設定し，そこにおけるカメラの位置および角度，およびカメラで計測されるマーカの方角からマーカの位置を計算した．実際の計測では X-Y 座標系のような既知の座標系は存在せず，形状や大きさが既知である標準器を用いてカメラで計測される空間を較正し，その較正に基づいて，カメラで計測されたマーカの方角からマーカの位置を決定する．ある空間の較正とは，その空間に座標系を設定することであり，本問の場合では，カメラで計測されるマーカの方角からマーカの座標値 (較正によって設定した座標系におけるマーカの位置) を与える変換式を求めることである．

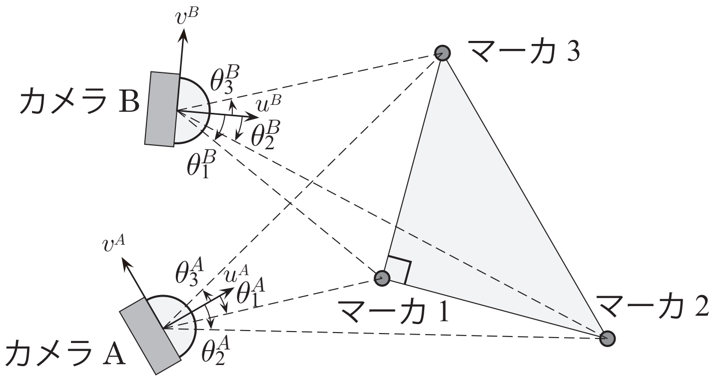

図 4: 2 台のカメラからなる計測システムを，較正している様子.

(問 3)　図 4 に示す状況を考える．2 次元平面内に置かれたマーカの位置を，同一平面内に置かれた 2 台のカメラ (カメラ A，カメラ B) で計測するシステムがあり，この平面を，等辺の長さが 1 である直角二等辺三角形の各頂点にマーカが取り付けられた標準器を用いて較正することを考える．直角二等辺三角形の各頂点のマーカを，それぞれマーカ 1，マーカ 2 およびマーカ 3 と呼ぶ．カメラ A で計測された各マーカの方角が θ_1^A，θ_2^A および θ_3^A であり，カメラ B で計測された各マーカの方角が θ_1^B，θ_2^B および θ_3^B であったとする．このとき，マーカ 1，マーカ 2 およびマーカ 3 の位置 (座標) が，それぞれ $(0,0)$，$(1,0)$ および $(0,1)$ となるように，この平面を較正する．

(ア) 設定される座標系において，カメラ A の位置および角度が (x^A, y^A) および ϕ^A であるとする．図 4 の状況では，$-\pi/2 < \phi^A < \pi/2$ を満たす．(問 2) と同様に，カメラ A と標準器に取り付けられた各マーカの距離を仮定して連立方程式を導出し，その連立方程式を整理することで，x^A，y^A および ϕ^A が満たすべき連立方程式が得られる．その連立方程式は，以下のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan\phi^A \\ y^A - x^A \tan\phi^A \\ x^A + y^A \tan\phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta_2^A \\ \cos\theta_3^A \end{pmatrix} \tag{1}$$

行列の各要素 p_{ij} $(i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,2,3\})$ を θ_1^A，θ_2^A および θ_3^A のうち必要なものを用いて表せ．

(次のページに続く)

(イ) 式 (1) より，行列が逆行列を持たないような特殊な場合を除いて，カメラ A による計測値が θ_1^A，θ_2^A および θ_3^A であるマーカ 1，マーカ 2 およびマーカ 3 の位置 (座標) が，設定される座標系において $(0,0)$，$(1,0)$ および $(0,1)$ となるように，$\tan\phi^A$，$y^A - x^A\tan\phi^A$ および $x^A + y^A\tan\phi^A$ の値が決定される．これら 3 つの値をこの順に a，b および c とする．同様に，カメラ B の位置および角度が (x^B, y^B) および ϕ^B である (カメラ A の場合と同様に，カメラ B に対しても $-\pi/2 < \phi^B < \pi/2$ である) とすると，$\tan\phi^B$，$y^B - x^B\tan\phi^B$ および $x^B + y^B\tan\phi^B$ の値が決定される．これら 3 つの値をこの順に e，f および g とする．さて，設定される座標系のある点 (x, y) と，その点に置かれたマーカをカメラ A およびカメラ B で計測した値 (θ^A および θ^B とする) の関係を考える．x および y と，θ^A および θ^B の関係は，a，b，c，e，f および g を含む連立方程式で記述できる．その連立方程式を以下のように表現する．

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

行列の各要素 q_{11}，q_{12}，q_{21}，q_{22} およびベクトルの各要素 r_1，r_2 を，a，b，c，e，f，g，θ^A および θ^B のうち必要なものを用いて表せ．

(ウ) 式 (2) より x と y が決定できるために，カメラ 2 台とマーカの位置関係が満たすべき必要条件を述べよ．ただし，カメラの大きさは無視できるとし，一方のカメラとマーカの間に他方のカメラが位置することによってマーカが見えなくなること (オクルージョン) は考えないものとする．

(エ) カメラ 2 台とマーカの位置関係が，(ウ) の条件を満たしているとする．x および y を，a，b，c，e，f，g，θ^A および θ^B のうち必要なものを用いて表し，カメラで計測されるマーカの方角からマーカの座標値を与える変換式を求めよ．