

## 生体システム工学Ⅱ

次の〔Ⅱ - 1〕～〔Ⅱ - 3〕の3題を、それぞれ別の解答用紙に答えよ。

### 〔Ⅱ - 1〕

(問1) 図1のように、無限に広がった2つの平面を距離  $D$  だけ離して平行に設置し、それぞれの静電ポテンシャルが  $\phi_1, \phi_2$  ( $\phi_1 > \phi_2$ ) である場合を考える。ここでは、図1のように、平面に対して垂直な方向に  $x$  軸をとり、2つの平面から等距離にある平面上に原点  $O$  をとる。図1では、 $y$  軸を上向きに、 $z$  軸を紙面に対して垂直に裏から表の方向にとった。2つの平面の間は真空であり、電荷は存在しないとする。真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。このとき、 $-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2}$  の領域の静電ポテンシャル  $\phi(x, y, z)$ 、および、 $x$  軸方向の電場の大きさ  $E_x(x, y, z)$  を求めよ。

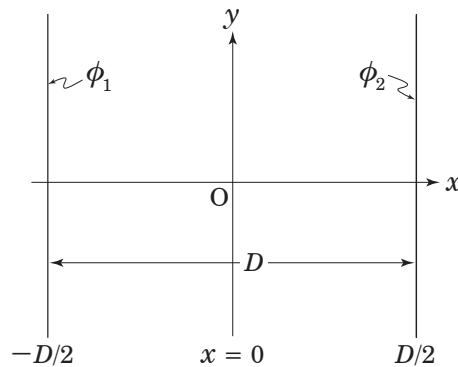


図1

(問2) 電荷の存在しない領域における静電ポテンシャル  $\phi(x, y, z)$  は、

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

を満たす。ここで、

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla^2 \phi &= \nabla \cdot \nabla \phi \end{aligned}$$

であり、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトルである。次の(ア)から(ウ)の関数  $\phi(x, y, z)$  は、それぞれ、式(1)を満たすことを示せ。ここでは、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とする。

(ア)  $\phi(x, y, z) = xyz$

(イ)  $\phi(x, y, z) = \frac{1}{r}$

(ウ)  $\phi(x, y, z) = \frac{x}{r^3}$

(次のページに続く)

(問3) 問1と同様に、静電ポテンシャルが、それぞれ、 $\phi_1, \phi_2$  ( $\phi_1 > \phi_2$ ) である平面に挟まれた空間を考え、真空中に原点  $O$  を中心として半径  $R$  の帯電していない導体球を設置する (図2(a)). ここでは、 $R \ll D$  とする. このとき、以下の問に答えよ.

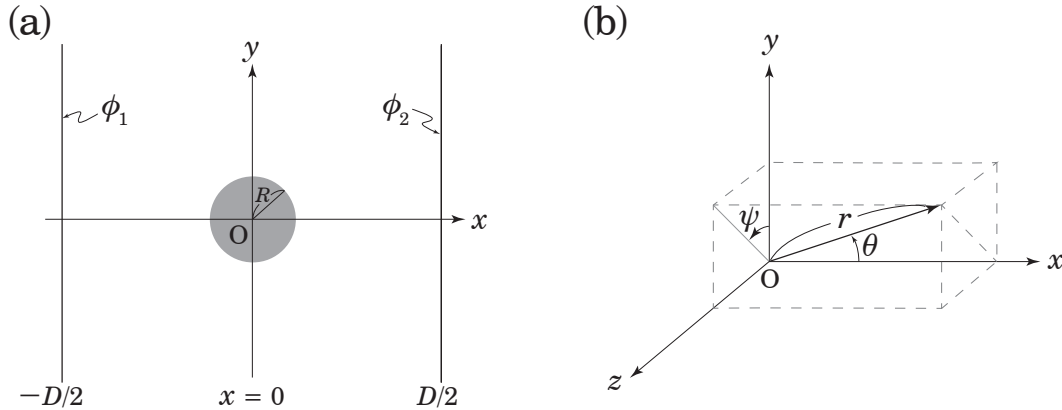


図2

(ア)  $xy$  平面上において、導体球のまわりの電気力線の特徴を図解し、導体球の表面において静電ポテンシャルが満たす境界条件を説明せよ.

(イ)  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とし、2平面間の  $r > R$  の領域の静電ポテンシャルとして

$$\phi(x, y, z) = A_0 + A_1 x + A_2 \frac{x}{r^3} \quad (2)$$

を仮定する. ここで、 $A_0, A_1$ , および、 $A_2$  は定数である. さらに、図2(b)のように、動径  $r$  が  $x$  軸の正の向きと成す角を  $\theta$ , 動径  $r$  の  $yz$  平面への射影が  $y$  軸の正の向きと成す角を  $\psi$  とする球座標系を考える. 式(2)は、 $r \gg R$  のとき、

$$\phi(x, y, z) = A_0 + A_1 x \quad (3)$$

と近似できるものとする. 式(2), および、式(3)が、この系の境界条件を満たすように  $A_0, A_1$ , および、 $A_2$  を決定し、静電ポテンシャルを球座標を用いて表せ.

(ウ) 導体球の表面 ( $r = R$ ) における電場の向き、および、電場の大きさを求めよ.

(問4) ウニの卵細胞のような球形の細胞が溶液中に置かれた系を考える。細胞の内部は電解質溶液で満たされており、電気的に中性になるように保たれている。細胞内部と外部の溶液の電気伝導率を、それぞれ、 $\sigma_i$ 、 $\sigma_o$ とする。細胞膜は絶縁体の皮膜とみなすことができ、それが電流の細胞内への流入、および細胞外への流出を妨げている。細胞の内部に正味の電流はなく、電場は0とする。ここでは、図3のように、球形の細胞を、 $x$ 軸方向に向けた大きさ  $E_o$  の一様な電場中に置く。細胞膜の外表面は半径  $R$  の球面とし、膜の厚さは  $\delta$  とする。図3では膜の厚さを誇張して描いてあるが、実際の細胞膜の厚さは細胞の半径と比べて非常に小さい。球形の細胞の中心を原点にとり、その中心からの距離を  $r$ 、球座標系の動径  $r$  が  $x$  軸の正の向きと成す角を  $\theta$  とする。 $z$  軸を紙面に対して垂直に裏から表の方向にとり、球座標系の動径  $r$  を  $yz$  平面へ射影した線分が  $y$  軸の正の向きと成す角を  $\psi$  とする。このとき、以下の問に答えよ。

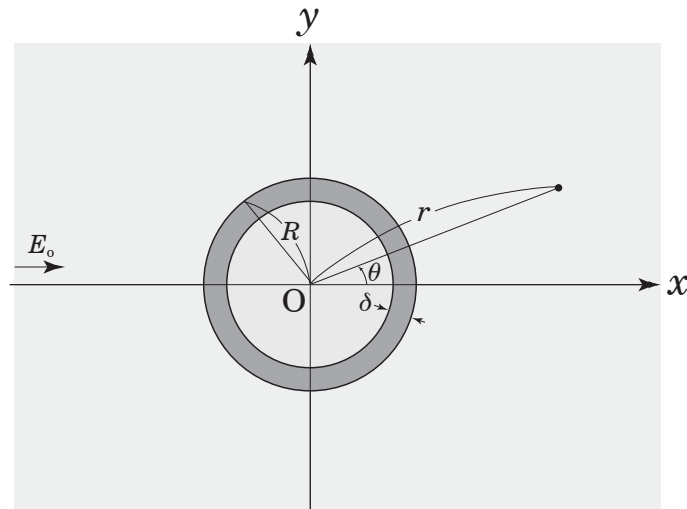


図3

- (ア)  $xy$  平面上において、細胞のまわりの電気力線の特徴を図解し、細胞の外表面 ( $r = R$ ) における静電ポテンシャルの境界条件を説明せよ。
- (イ)  $r > R$  の領域における静電ポテンシャルの関数形として

$$\phi(r, \theta) = C_1 r \cos \theta + C_2 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (4)$$

を仮定する。ここで、 $C_1$  および  $C_2$  は定数である。この系の境界条件を満たす、 $C_1$  および  $C_2$  を求めよ。

- (ウ) 膜の内部 ( $R - \delta < r < R$ ) の静電ポテンシャルが  $r$  方向に線形に変化することを仮定し、膜の内部の  $r$  方向の電場の大きさを求めよ。

[Ⅱ - 2]

ピンホールカメラによる撮影で像に生じるボケに関する問題を考える．図1左のような穴（ホール）をもつピンホールカメラを想定する．図1右のようにピンホールは， $z = 0$ の面上にある半径  $r$  ( $r > 0$ )の円形の穴で，この穴を通して  $u$ - $v$  撮像面 ( $z = 1$ ) で像が取得される．撮影対象はカメラに正対する平面（撮影対象面） $z = -z_1$  ( $z_1 > 0$ ) に配置されている．

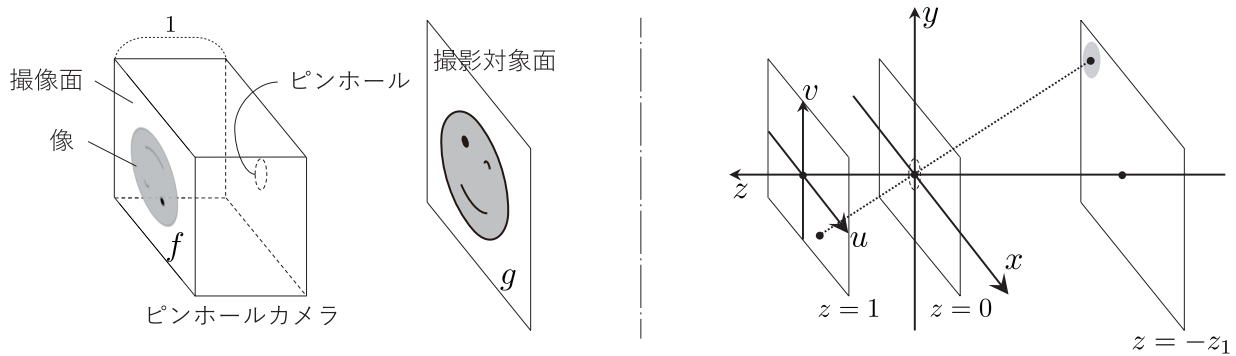


図1: ピンホールカメラモデル

ただし，撮影対象面上には強度の異なる微小な光源（点光源）が分布しており，各点光源から放射する強度は方向によらず一定であるとする．ピンホールを通過する光線のみが減衰することなく直進して撮像面に到達する．撮像面の各点に記録される強度は，その点に到達する（寄与する）光線の強度を総和したものとする．撮像面への光線の入射角に応じて生じる強度の変化は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

(問1) 撮像面上の点  $(u, v)$  に寄与する撮影対象面上の点  $(x, y, -z_1)$  の集合が形成する領域は，点  $(u, v)$  の位置によらず半径一定の円となる．この円の中心  $(x_c(u), y_c(v))$  と半径  $r_c$  を求めよ．

このピンホールカメラで，撮影対象面の強度分布が次の式 (1) に示す  $g(x, y)$  で定義される撮影対象を撮影して取得される画像  $f(u, v)$  を  $x_c(u), y_c(v), r_c$  を用いて表すことを考える．

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (1)$$

(問2) 点  $(x, y, -z_1)$  からの光線が点  $(u, v)$  へ寄与するとき， $k(x, y; x_c(u), y_c(v)) = 1$  となり，寄与しないときに  $k(x, y; x_c(u), y_c(v)) = 0$  となるような関数  $k$  を考える．点  $(u, v)$  における強度  $f(u, v)$  を  $g$  と  $k$  を用いて表せ．

(問3)  $u < -\frac{r_c}{z_1}$  および  $u > \frac{r_c}{z_1}$  ときの  $f(u, v)$  の値をそれぞれ求めよ．

(問4)  $u$  と  $f(u, v)$  の関係を図示せよ．

(問5)  $|u| < \frac{r_c}{z_1}$  のときの  $f(u, v)$  を求めよ．ただし，式 (2) を用いても良い．

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (2)$$

[Ⅱ - 3]

種類の異なる商品を複数用意し，各商品から受ける印象を数値化することを考える．商品の印象の数値化とは，例えば，毛筆の書き心地などを評価する場合である．商品の印象は，間隔尺度として数値化できるものとする．間隔尺度とは，原点や単位の取り方には意味がなく数値の間隔のみに意味がある尺度である．

(問1) 2種類の商品として，商品1と商品2を比較する場合を考える．同一種類の商品であっても個人毎の印象には，ばらつきがある．そのようなばらつきを考慮するために，ここでは商品1, 2の印象をそれぞれ確率変数  $R_1, R_2$  で表す． $R_1, R_2$  は互いに独立であり，平均がそれぞれ  $\mu_1, \mu_2$ ，分散がそれぞれ  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  である正規分布に従うとする(図1)．(ア)から(ウ)の問いに答えよ．

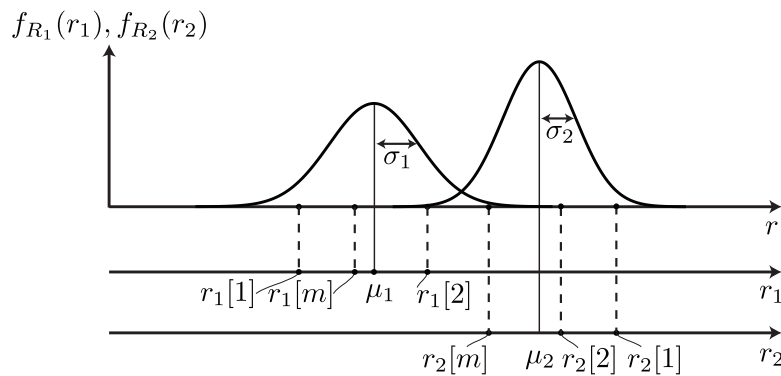


図1:  $R_1$  と  $R_2$  が従う確率密度関数の模式図．  $r_1[t], r_2[t] (t = 1, 2, \dots, m)$  は，それぞれ  $t$  人目の評価における  $R_1, R_2$  の実現値を表す．

- (ア) 確率変数  $R_{12} = R_1 - R_2$  の平均を  $\mu_{12}$ ，分散を  $\sigma_{12}^2$  とする．  $\mu_{12}, \sigma_{12}$  をそれぞれ  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$  で表せ．
- (イ)  $R_1$  と  $R_2$  の確率密度関数を  $f_{R_1}(r_1), f_{R_2}(r_2)$  とする．  $R_{12}$  の実現値を  $x$  とするとき確率密度関数  $f_{R_{12}}(x)$  を  $f_{R_1}$  と  $f_{R_2}$  を使って表せ．
- (ウ)  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{1}{2}$  とするとき，  $R_{12}$  の確率密度関数は，平均  $\mu_{12}$ ，分散1の正規分布になることを示せ．さらに  $R_1 > R_2$  となる確率  $P(R_1 > R_2)$  を式(1)で定義される  $\Phi(z)$  と  $\mu_1, \mu_2$  を用いて表せ．

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{1}$$

(次のページに続く)

(問2) 種類の異なる5個の商品があるとする。サーストンの一対比較法を用いて5種類の商品の印象を数値化することを考える。サーストンの一対比較法は、評価対象となる3種類以上の商品から2種類を選び、その2種類の商品に対する印象の優劣をつけることで、各種類の商品に対する印象の優劣を数値化することができる。ここでは、5種類の商品に1から5までの番号を付け、その中から2種類を選択する10通りの組み合わせから、無作為に重複なく  $j$  種目と  $k$  種目の商品の組を取り出す。評価者は各組に対して必ず優劣をつける。これを複数人の評価者に対して行い、そのうち  $j$  種目の商品が  $k$  種目の商品よりも優れていると回答した人数の比率を  $\hat{p}_{jk}$  とする(表1)。  $i (= 1, 2, \dots, 5)$  種目の商品の印象は、独立で平均  $\mu_i$ 、分散  $\sigma_i$  の正規分布に従う確率変数  $R_i$  で表されたとする。  $\hat{p}_{jk}$  を確率  $P(R_j > R_k)$  の実現値と見なすと、問1より確率変数  $R_j - R_k$  は正規分布に従うため、標準正規分布表より対応するZ値として  $\hat{z}_{jk}$  が計算できる(表2)。ただし、  $\hat{z}_{ii} = 0$  とする。さらに、  $R_i$  の分散を  $\sigma_i^2 = \frac{1}{2}$  とする。以上の方法で全ての  $\hat{z}_{jk}$  が得られているとき、以下の問いに答えよ。

表1:  $\hat{p}_{jk}$

$j \backslash k$	1	2	3	4	5
1	-	0.29	0.81	0.72	0.39
2	0.71	-	0.67	0.91	0.46
3	0.19	0.33	-	0.76	0.18
4	0.28	0.09	0.24	-	0.04
5	0.61	0.54	0.82	0.96	-

表2:  $\hat{z}_{jk}$

$j \backslash k$	1	2	3	4	5
1	0.00	0.55	-0.88	-0.58	0.28
2	-0.55	0.00	-0.44	-1.34	0.10
3	0.88	0.44	0.00	-0.71	0.92
4	0.58	1.34	0.71	0.00	1.75
5	-0.28	-0.10	-0.92	-1.75	0.00

(ア)  $z_{jk}$  を  $\hat{z}_{jk}$  の真値とする。また、間隔尺度の性質に基づき簡単のため  $\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \mu_i = 0$  と定める。評価関数を

$$E(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5) = \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 (\hat{z}_{jk} - z_{jk}(\mu_j, \mu_k))^2 \quad (2)$$

と定義する。印象  $R_1, R_2, \dots, R_5$  の平均  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5$  の推定値は、  $E(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5)$  を最小化する  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_5$  として求められる。  $\hat{\mu}_j = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \hat{z}_{jk}$  となることを示せ。

(イ) 表2のデータを用いて、商品の種類を表す番号を印象の優劣順に並べよ。