

生体システム工学Ⅱ

次の [1] ~ [3] の 3 題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[II 1]

閉状態 (C) と開状態 (O) の間を確率的に遷移する単一イオンチャンネルを流れるイオン電流を計測する電気生理学的仮想実験を考える．チャンネルが閉状態にあるときには電流は流れず (0 pA)，開状態にあるときには 1 pA の電流が流れるとする．時刻 t にチャンネルを流れる電流を表す確率変数を $X(t)$ とする． $X(t)$ は

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{チャンネルの状態が C のとき} \\ 1, & \text{チャンネルの状態が O のとき} \end{cases}$$

で定義され，それに基づく確率過程を考える．時刻 t にチャンネルの状態が C にある確率を $p_C(t)$ ，O にある確率を $p_O(t)$ とする． $p_C(t) + p_O(t) = 1$ である．ある時刻 t にチャンネルの状態が C にあったとき，微小時間 Δt 経過後の時刻 $t + \Delta t$ のチャンネルの状態は，確率 $\lambda_{co}\Delta t$ で状態 O に遷移する．同様に，ある時刻 t にチャンネルの状態が O にあったとき，微小時間 Δt 経過後の時刻 $t + \Delta t$ のチャンネルの状態は，確率 $\lambda_{oc}\Delta t$ で状態 C に遷移する．ここで， λ_{co} と λ_{oc} は正の定数である．

(問 1) 時刻 $t + \Delta t$ に，チャンネルの状態が C にある確率 $p_C(t + \Delta t)$ ，および，O にある確率 $p_O(t + \Delta t)$ を，それぞれ， $p_C(t)$ ， $p_O(t)$ ， λ_{co} ， λ_{oc} ， Δt を用いて表せ．

(問 2) (問 1) の結果に対して， $\Delta t \rightarrow 0$ とすることで， $p_C(t)$ および $p_O(t)$ それぞれが従う微分方程式を導け．さらに，ある初期時刻 $t = t_0$ における初期確率を $p_C(t_0) = q$ ， $p_O(t_0) = 1 - q$ として，これら 2 つの微分方程式の解を求めよ．なお， $0 \leq q \leq 1$ である (ヒント： $p_C(t)$ に関する微分方程式を導く際には， $p_O(t) = 1 - p_C(t)$ を用い， $p_O(t)$ に関する微分方程式を導く際には， $p_C(t) = 1 - p_O(t)$ を用いると， $p_C(t)$ および $p_O(t)$ に関する微分方程式は 2 つの干渉しない方程式となり，解を求めるのが簡単になる．)

(問 3) (問 2) で求めた微分方程式の解に基づき，十分時間が経過したとき ($t \rightarrow \infty$)，すなわち，系の定常状態においてチャンネルの状態が C および O のそれぞれに存在する確率 $\bar{p}_C \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} p_C(t)$ および $\bar{p}_O \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} p_O(t)$ を求め，それらを， λ_{co} および λ_{oc} を用いて表せ．

(問 4) 定常状態におけるチャンネルの開閉ダイナミクス ($X(t)$ の確率的変動) を考える．すなわち，定常状態であっても，チャンネルの状態の時間的変動を観測すると確率的に C と O の間を行き来する．もちろん，定常状態であるので，任意の時刻にチャンネルの状態を観測したとき，その状態が C である確率は \bar{p}_C であり，O である確率は \bar{p}_O であり，時間に依らない一定確率となる．この理解のもと， $X(t)$ の期待値と分散

$$\begin{aligned} m &= E[X(t)], \\ \sigma^2 &= \text{Var}[X(t)] \end{aligned}$$

を求めよ．

(次のページに続く)

(問5) $p_C(t)$ および $p_O(t)$ が定常確率にあるとして、以下の確率を求めよ。

$$\begin{aligned} P(X(t) = 1), \\ P(X(t) = 0), \\ P(X(t + \tau) = 1 | X(t) = 1), \\ P(X(t + \tau) = 0 | X(t) = 1), \\ P(X(t + \tau) = 0 | X(t) = 0), \\ P(X(t + \tau) = 1 | X(t) = 0). \end{aligned}$$

ここで、 τ は適当なラグ時間である。また、 P は確率測度であり、例えば $P(X(t) = 1)$ は $X(t) = 1$ である確率を表す。条件付き確率の計算では(問2)で求めた微分方程式の初期値問題の解を利用せよ。

(問6) 確率過程 $X(t)$ の自己相関関数

$$R_{XX}(\tau) = E[(X(t + \tau) - m)(X(t) - m)]$$

を求めよ。

(問7) $X(t)$ のパワースペクトル

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

を求めよ。ここで、 ω は角周波数、 j は虚数単位である。さらに、パワースペクトルの形状(概形)を両対数表示で図示し、その形状のどこに、 λ_{oc} と λ_{co} の値を反映した情報が現れているかを考察せよ。さらに、その考察に基づき、もし本問題で考えた性質を有する単一チャンネルからイオン電流の時間変化を計測した場合に、得られたデータからどのように λ_{oc} と λ_{co} を推定するか、その手順・方法を述べよ。

[Ⅱ 2]

図1(a)のように，一方の端が1軸ジョイントで空間的に固定された剛体リンクを考える．剛体リンクは1軸ジョイントを中心として2次元平面内を回転する．リンクには鉛直下向きに重力が作用する．重力加速度の大きさを g とする．リンクの質量を m ，ジョイントから質量中心までの距離を h ，ジョイントまわりの慣性モーメントを I とする．リンクにはジョイントの位置で，鉛直上向きからの傾き θ に比例する復元力と，角速度 $\omega (= d\theta/dt)$ に比例する摩擦力が生じる．それぞれの比例係数を K および B とする ($K > 0, B > 0$)．この問題では直立状態 $(\theta, \omega) = (0, 0)$ 近傍のダイナミクスを対象として，直立状態の安定性を考える．したがって， $\sin \theta \simeq \theta$ および $\cos \theta \simeq 1$ の近似が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

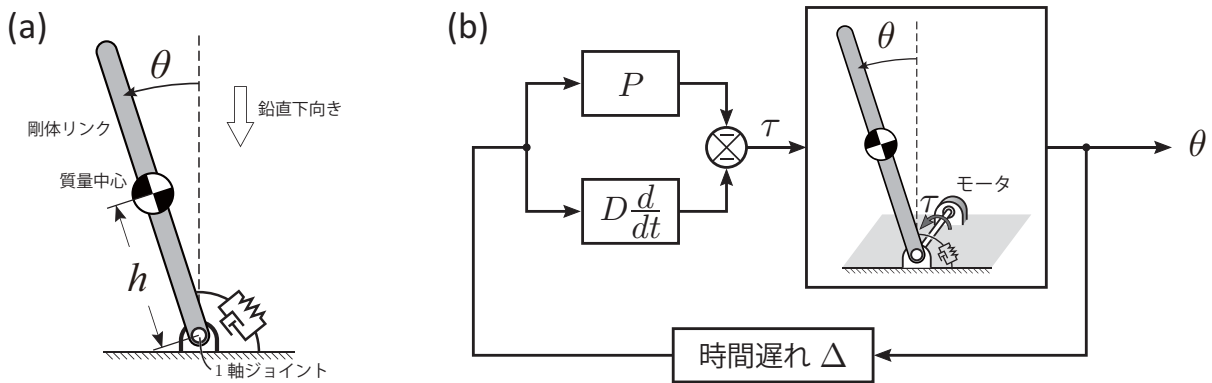


図1: (a)2次元平面内を回転する倒立剛体リンク．(b)時間遅れを伴うモータのフィードバックトルクに駆動される倒立剛体リンク．

(問1)

- (ア) $|\theta| \ll 1$ を考慮して，図1(a)の倒立剛体リンクの運動方程式を記せ．
- (イ) 剛体リンクの傾き θ および角速度 ω を要素とする状態変数ベクトルを

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}$$

として，図1(a)のシステムを以下のように表現する．

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

行列 \mathbf{A} の各成分 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ を求めよ．

- (ウ) 行列 \mathbf{A} の固有値を求めよ．
- (エ) $K < mgh$ の場合と $K > mgh$ の場合のそれぞれにおける平衡点 $(\theta, \omega) = (0, 0)$ の安定性を判別せよ．

(次のページに続く)

(問2) 図1(a)のジョイントにモータを取り付けたシステムを考える(図1(b)). モータは剛体リンクの傾き θ と角速度 ω に比例したフィードバックトルク τ を発生するものとする. このとき, 比例ゲインを P , 微分ゲインを D とする. さらに, フィードバックトルクの発生には時間遅れ Δ があるとする. これより, モータが発生するトルクは, $-P\theta(t-\Delta) - D\omega(t-\Delta)$ となる.

(ア) Δ が微小であるとして, $\theta(t-\Delta)$ および $\omega(t-\Delta)$ を t のまわりで Δ に関して2次までテイラー展開せよ.

(イ) 以下では, $\theta(t-\Delta)$ および $\omega(t-\Delta)$ を Δ に関して1次のテイラー展開で近似する(Δ に関する2次以上の項を無視する). モータを取り付けた倒立剛体リンクの運動方程式を以下のようにベクトルと行列で表記することを考える.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$$

行列 \mathbf{A}' の各成分 $a'_{11}, a'_{12}, a'_{21}, a'_{22}$ を求めよ.

(ウ) 倒立剛体リンクの状態とモータが発生するトルクの間時間遅れ Δ が平衡点の安定性に及ぼす影響を考える. 重力加速度およびモータを取り付けた倒立剛体リンクのパラメータを表1の値とする. 時間遅れ Δ は0sから0.2sの間の値をとるとする. 行列 \mathbf{A}' の固有値を調べることで, 平衡点の安定性の Δ 依存性を論ぜよ.

表1: 剛体リンクおよびフィードバック制御のパラメータ

g [m/s ²]	10	K [Nm/rad]	0.8×800
m [kg]	80	B [Nm·s/rad]	10
h [m]	1	P [Nm/rad]	0.25×800
I [Nm·s ² /rad]	100	D [Nm·s/rad]	20

[Ⅱ 3]

ひずみを金属の電気抵抗の変化に変換する金属ひずみゲージについて、以下の問いに答えよ。

(問1) 電気抵抗率 ρ 、長さ l 、断面積 S の金属抵抗線の電気抵抗が、

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad (1)$$

で与えられ、長さ方向に電流を流すものとする。電気抵抗の変化量 ΔR と、電気抵抗率の変化量 $\Delta \rho$ 、長さの変化量 Δl 、断面積の変化量 ΔS の間には、以下の近似式が成り立つ。

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial R}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial R}{\partial S} \Delta S \quad (2)$$

式(1)を用いて、 $\Delta R/R$ を $\rho, l, S, \Delta \rho, \Delta l, \Delta S$ で表わせ。

(問2) 金属抵抗線は、図1のように長さ方向に引張りが作用したとき、長さ方向に伸び、断面積が減少する線形等方弾性体とする。長さ方向に伸びる時のひずみ $\Delta l/l$ を正のひずみとし、 $\Delta l/l$ が十分小さいとき、金属抵抗線は、式(3)で表される性質を満たすものとする。

$$\frac{\Delta S}{S} = -2\nu \frac{\Delta l}{l} \quad (3)$$

ここで、 ν はポアソン比である。このとき、 $\Delta R/R$ を $\rho, l, \Delta l, \Delta \rho, \nu$ で表わせ。

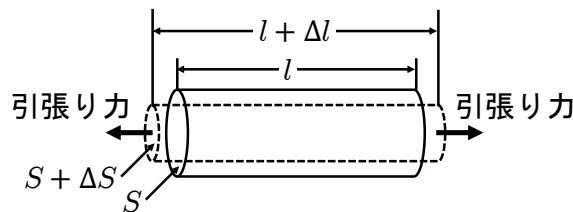


図1: 金属抵抗線にひずみが生じる様子

(問3) 金属抵抗線の体積を $V (= Sl)$ 、体積の変化量を ΔV とする。体積の変化率 $\Delta V/V$ を2次以上の微小量は無視して $\nu, l, \Delta l$ を用いて表わせ。

(問4) 電気抵抗率の変化率 $\Delta \rho/\rho$ を式(4)のように与える。

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = C_B \frac{\Delta V}{V} \quad (4)$$

ここで、 C_B はブリッジマン定数である。また、電気抵抗の変化率 $\Delta R/R$ と長さの変化率であるひずみ $\epsilon (= \Delta l/l)$ の関係は式(5)で表される。

$$\frac{\Delta R}{R} = K \epsilon \quad (5)$$

ここで、 K はゲージ率である。ゲージ率 K を C_B, ν を用いて表わせ。また、 $\nu = 0.3, C_B = 1.13$ の場合におけるゲージ率 K を求めよ。

(次のページに続く)

- (問5) 図2のような金属抵抗線を用いたひずみゲージに生じるひずみを計測する電気回路について考える．図3のように，無ひずみ状態において同じ電気抵抗 R をもつ「ひずみゲージ1」および「ひずみゲージ2」ならびに同じ電気抵抗 R をもつ二つの抵抗素子を用いてホイートストンブリッジを構成する．ひずみゲージ1のひずみ方向に引張り力が作用したとき，ひずみゲージ1には正のひずみ ϵ が生じるが，ひずみゲージ2にはひずみが生じないものとする．簡単のため，ひずみゲージ1，ひずみゲージ2および二つの抵抗素子は温度変化に対して電気抵抗は変化しないものとする．ひずみゲージ1のひずみ方向に引張り力が作用したとき，ひずみゲージ1の電気抵抗 R_1 を R, K, ϵ を用いて表わせ．

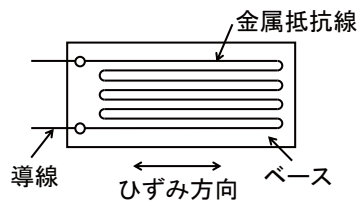


図2: 金属抵抗線を用いたひずみゲージ

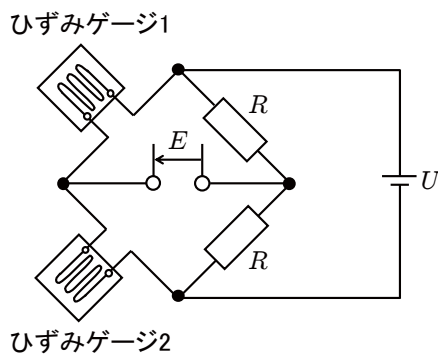


図3: ホイートストンブリッジ

- (問6) 電源電圧を U としたとき，出力電圧 E を U, K, ϵ を用いて表わせ．ただし，ひずみによる電気抵抗の変化は電気抵抗 R に比べて十分小さいものとする．
- (問7) 温度上昇によって電気抵抗が変化する場合を考える．このとき，ホイートストンブリッジを構成するひずみゲージ1，ひずみゲージ2および二つの抵抗素子について，どのような点を工夫すればよいか，考察せよ．