生体システム工学Ｉ

次の[Ｉ - １]～[Ｉ - ３]の３題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[Ｉ - １]

熱力学に関する以下の文章を読み，空欄に当てはまる適切な語句あるいは数式を解答用紙に記せ．

熱力学は熱平衡を前提として物質の状態や状態変化を記述する学問体系である．しかし，真の熱平衡にある物質の状態は変化することはないので，それを少しだけ平衡からずらすことで徐々に状態を変化させる過程は $\boxed{\text{(a)}}$ と呼ばれ，熱力学は基本的に $\boxed{\text{(a)}}$ を扱う．nモルの理想気体を考えると，その圧力p, 体積V, 温度Tの間には，気体定数Rを用いると $\boxed{\text{(b)}}$ という関係が成り立つ（状態方程式）．このように，気体の状態は，(p,V,T)のどれか２つを指定すれば完全に定まる．圧力pの気体の体積を微小体積dVだけ変化させるのに必要な仕事量は $\boxed{\text{(c)}}$ であり，体積が小さくなる（dVが負である）と気体にした微小仕事が気体内部に蓄えられ，気体の“エネルギー”が増えるが，その変化を$d'W$とすれば，$d'W = -\boxed{\text{(c)}}$ となる．気体が密封されたピストンを押して気体の状態を(p_A, V_A, T_A)である状態Aから(p_B, V_B, T_B)である状態Bに変化させたときの気体の“エネルギー”の変化Wは，$W = \int d'W = -\int_{V_A}^{V_B} \boxed{\text{(c)}}$ と書ける．図１はこの様子をp-V平面上に表したものである．

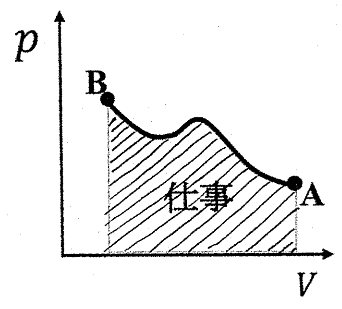

図１

図１の曲線下の領域の面積が，状態がAからBに変化する間に気体が外部からなされた全仕事量である．逆に状態がBからAに変化した場合，気体は外部に仕事をすることになる．この積分の値Wは状態Aから状態Bに至る経路に依存する．これは，状態Aから状態Bに至る経路に依存して，気体の温度の変化の仕方も異なり，気体（ピストン）から出入りする熱量が異なるためである．したがって，得られた Wは，気体の状態を一意に指定することができる系の状態量には成り得ない．一方，$d'W$に付随してピストンから出入りする微小熱量$d'Q$を考慮に入れた気体の内部エネルギーの微小変化$dU = d'Q + d'W$の積分であるUは，系の状態量であり，Uの値によって気体の状態は一意に指定される．

（次のページに続く）

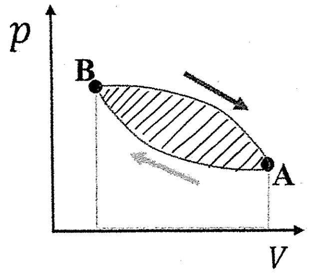

図２

エンジンはピストンの運動で気体の圧縮と膨張を繰り返すサイクル機関である（図２）．このサイクルで囲まれた部分の面積が１サイクルでエンジンから取り出せる仕事を表す．内部エネルギーUは状態量であるので，ある状態から１サイクルを経て同じ状態に戻ると$dU =$ $\boxed{\text{(d)}}$ となる．このときもし$d'Q = 0$ならば$d'W =$ $\boxed{\text{(d)}}$ であり，熱を加えることなく仕事は取り出せないことを意味する．

熱の出入りを遮断した熱力学過程は $\boxed{\text{(e)}}$ と呼ばれる．このとき$d'Q = 0$なので，$dU = d'Q + d'W = d'W = -$ $\boxed{\text{(c)}}$，すなわち$dU +$ $\boxed{\text{(c)}}$ $= 0$が成り立つ．状態量であるUの値は，(p, V, T)を一意に指定する．(p, V, T)は状態方程式で関係しているので，Uはこのうちどれか２つの値で一意に決まる．ここでは，$U(T, V)$を考えると，Uの完全微分は，$dU =$ $\boxed{\text{(f)}}$ と書ける．気体の定積比熱C_Vは体積を一定に保った状況において気体１モルあたりの内部エネルギーUの温度変化に対する変化率であることを用い，$dU =$ $\boxed{\text{(f)}}$ を$dU +$ $\boxed{\text{(c)}}$ $= 0$に代入すると，n $\boxed{\text{(g)}}$ $dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T +\right.$ $\boxed{\text{(h)}}$ $\left.\right] dV = 0$となる．理想気体の場合，内部エネルギーは温度のみの関数であり$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$となるので，前述の式は，$n$ $\boxed{\text{(g)}}$ $dT +$ $\boxed{\text{(h)}}$ $dV = 0$と簡単化できる．この等式は，理想気体の状態方程式 $\boxed{\text{(b)}}$ を使って圧力を消去することでさらに簡単化できて，$\boxed{\text{(g)}}$ $dT +$ $\boxed{\text{(i)}}$ $dV = 0$となる．さらに，理想気体では $\boxed{\text{(g)}}$ も温度Tのみの関数であることに気をつけて，$\frac{C_V}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$とおいてこの式を変数分離すると，$\boxed{\text{(j)}}$ $dV =$ $\boxed{\text{(k)}}$ dTとなり，両辺を積分して理想気体の状態方程式を使うと，$\boxed{(\ell)}$ =一定というポワソンの式を得る．これが $\boxed{\text{(e)}}$ におけるp-V関係である．

$\boxed{\text{(e)}}$ におけるp-V関係が得られると，いわゆる理想気体のカルノーサイクル（図３）を考察することができる．

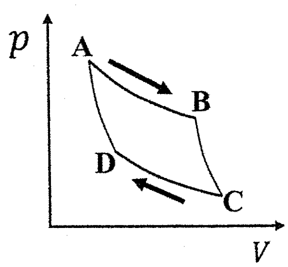

図３：カルノーサイクル

（次のページに続く）

カルノーサイクルは最も単純な熱機関で高温熱源（温度T_H）と低温熱源（温度T_L）の２つの熱源の間で動作する．図３において，nモルの理想気体からなるカルノーサイクルを考える．状態AからBの変化では，ピストンが高温熱源と接して熱平衡を保ちながら等温（温度T_H）で体積と圧力が変化し，状態CからDの変化では，ピストンが低温熱源と接して熱平衡を保ちながら等温（温度T_L）で体積と圧力が変化する．温度の異なる熱源と接した$\boxed{\text{(a)}}$のp-V曲線（双曲線）は交わることがないので，$\boxed{\text{(a)}}$のみを使って両者の過程をつないだサイクルを作るには，これら２つの過程の間を$\boxed{\text{(e)}}$でつなぐしかない（状態BからCおよび状態DからA）．このように，カルノーサイクルでは高温熱源から熱を受け取りその一部を仕事に変え，残りの熱を低温熱源に捨てる．状態AからBの変化で気体が高温熱源から得た熱量をQ_H，状態CからDの変化で気体が低温熱源に捨てた熱量をQ_Lとする．また，状態A，B，C，Dにおける気体の体積をそれぞれV_A，V_B，V_C，V_Dとする．状態AからBの変化で気体が外部にした仕事W_{AB}は状態方程式を使って具体的に積分を実行すると$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} \boxed{\quad\text{(c)}\quad} = \boxed{\text{(m)}}$ となる．理想気体の内部エネルギーは温度のみで決まるので，等温変化である状態AからBの変化では内部エネルギーの変化はない．一方，状態Bから状態Cへの変化で気体が外部にした仕事W_{BC}は，$W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} \boxed{\quad\text{(c)}\quad}$であるが，$\boxed{\text{(e)}}$では外部との熱のやり取りがなく（$d'Q_{BC} = 0$），理想気体の内部エネルギーは温度$T$のみで決まるので，それを$U(T)$と書くと，$W_{BC} = \boxed{\quad\text{(n)}\quad}$となる．同様に，状態CからDの変化で気体が外部から<u>された</u>仕事W_{CD}は$W_{CD} = -\int_{V_C}^{V_D} \boxed{\quad\text{(c)}\quad} = \boxed{\text{(o)}}$，状態DからAの変化で気体が外部から<u>された</u>仕事W_{DA}は内部エネルギー$U(T)$を用いて$W_{DA} = \boxed{\text{(p)}}$と書ける．ここまでの結果に用いると，$Q_H = \boxed{\text{(q)}}$，$Q_L = \boxed{\text{(r)}}$となる．ここで，状態BとCにおける圧力と体積に関するポアソンの式が等しいこと，および状態DとAにおいても圧力と体積に関するポアソンの式が等しいことを利用すると，体積V_A，V_B，V_C，V_Dの間に$\frac{V_C}{V_B} = \boxed{\text{(s)}}$という関係が成り立つことがわかる．したがって，熱量の比は，$\frac{Q_H}{Q_L} = \boxed{\text{(t)}}$となる．この結果を用いると，カルノーサイクルの熱効率ηは，$\eta = \frac{W_{AB}+W_{BC}-W_{CD}-W_{DA}}{Q_H} = \boxed{\text{(u)}}$ となる．

上述した式$dU = d'Q + d'W$は，$d'Q = dU + \boxed{\quad\text{(c)}\quad}$と書き換えられる．これを参考にして，新しい量$H = U + pV$を定義する．$H$は$\boxed{\text{(v)}}$と呼ばれる．状態量$U$を含むものであるので，$\boxed{\text{(v)}}$は状態量である．$H$の微小変化は $dH = dU + \boxed{\quad\text{(c)}\quad} + \boxed{\quad\text{(w)}\quad}$ となるが，定圧変化の条件下では$dH = dU + \boxed{\quad\text{(c)}\quad}$となり，$dH = d'Q$が成り立つ．$Q = \int d'Q$の値は$W = \int d'W$と同様に経路に依存するため，状態量とは成り得ないが，定圧変化の条件下においては，状態量である$\boxed{\text{(v)}}$は系に出入りする熱量Qと同じ意味を持つ．定圧下では，系に加えた熱は$\boxed{\text{(x)}}$と内部エネルギーの上昇に使われるが，これら両方を足し合わせたものが$\boxed{\text{(v)}}$である．

[I - 2]

（問 1）n 個の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は母集団分布（母平均 μ，母分散 σ^2）に従う独立な確率変数であり，$\bar{X}$ を次のように定義する．

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

（ア）$\bar{X}$ の期待値 $E(\bar{X})$ および分散 $V(\bar{X})$ を μ，σ^2 の式で表せ．

（イ）n 個の標本が与えられたとき，母分散の推定量として，標本分散 S^2 および不偏分散 s^2 はそれぞれ次の式で定義される．

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{2}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{3}$$

このとき，5 個の観測値

3, 5, 7, 9, 6

を無作為標本であると仮定して，それに対する標本平均，標本分散および不偏分散を求めよ．

（ウ）標本分散の期待値および不偏分散の期待値を μ および σ^2 を用いて表せ．比較的少数の標本から母分散を推定する際に不偏分散が用いられることが多い．その理由を説明せよ．

（問 2）標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立で同一の分布に従う確率変数とし，その実現値を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の母集団の未知のパラメータを θ，確率密度を $f(x;\theta)$ とする．このとき，標本データの尤度関数 $L(\theta)$ は，

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \tag{4}$$

で与えられ，尤度関数を最大化することで θ の推定量（最尤推定量）$\hat{\theta}$ がえられる．実際の計算では，$J = -\log L(\theta)$ を最小にする θ の値として求められる．以下では，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ のそれぞれが正規分布

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

に従うとする．ここで，μ および σ^2 はそれぞれ平均および分散に対応するパラメータである．このとき，以下の問いに答えよ．

（ア）μ および σ^2 の最尤推定量 $\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}^2$ をそれぞれ求めよ．

（イ）σ^2 を推定するために，標本分散や不偏分散を用いることも考えられる．標本分散および不偏分散と最尤推定量 $\hat{\sigma}^2$ の関係を説明せよ．

（次のページに続く）

(問 3) n 個の観測値のペア $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ に対して，直線 $y = ax + b$ を当てはめる場合を考える．ここで，x を入力，y を出力と解釈する．このとき，以下の問いに答えよ．

(ア) 入力 x_i に対する出力 y_i は，$\bar{y}_i = ax_i + b$ により決定される値にランダムな誤差 ϵ_i が加えられたものであると仮定する．すなわち，y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i \tag{6}$$

により与えられる．ここで，ϵ_i は平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従って独立して発生するものとする．このとき，a および b を推定するための尤度関数 $L(a, b)$ を求めよ．

(イ) (ア) で求めた $L(a, b)$ を用いて，a および b の最尤推定量をそれぞれ求めよ．

(ウ) n 個の観測値のペア $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ に対して，直線 $y = ax + b$ を当てはめる場合，最小二乗法を用いて a および b を求める方法も考えられる．(ア) の設定の下で，最小二乗法と最尤推定法を用いる方法の関係について考察せよ．

[I - 3]

図 1 で表されるような入力 $x_0(t)$，制御対象のインパルス応答 $h(t)$，出力 $y_0(t)$ のシステムがあり，$x_0(t)$ と $y_0(t)$ の時間領域での関係は式 (1) で表される．以下の問いに答えよ．なお，t は時間，a, b, c は実数である．

$$x_0(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_0(t)$$

図 1: システム

$$x_0(t) = a\frac{\mathrm{d}^2 y_0(t)}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}y_0(t)}{\mathrm{d}t} + cy_0(t) \tag{1}$$

(問 1)　$x_0(t)$ のラプラス変換 $X_0(s)$ を式 (2) で表す．s は複素数である．

$$X_0(s) = \int_0^\infty x_0(t)\exp(-st)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$y_0(t)$ のラプラス変換を $Y_0(s)$ とした場合，システムの伝達関数 (制御対象のラプラス変換) $H_0(s) = \dfrac{Y_0(s)}{X_0(s)}$ を求めよ．また，$H_0(s)$ の極を求めよ．なお，$y_0(0) = \dfrac{\mathrm{d}y_0(0)}{\mathrm{d}t} = 0$ とする．

(問 2)　$H_0(s)$ において下記 (ア) ～ (エ) の場合，複素平面上で極の位置を示せ．また，単位インパルス信号 (Dirac のデルタ関数) を制御対象に入力した際，$t \to \infty$ において出力が 0 となるものを (ア) ～ (エ) の中から全て選べ．

(ア)　$a > 0, b = 0, c > 0$

(イ)　$a > 0, b > 0, c > 0, b^2 < 4ac$

(ウ)　$a > 0, b > 0, c > 0, b^2 \geq 4ac$

(エ)　$a > 0, b > 0, c < 0$

(問 3)　ステップ信号

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

を制御対象に入力する．$H_0(s)$ において下記 (ア), (イ) の場合，$t \geq 0$ における出力を求めよ．

(ア)　$a = 1, b = 0, c = 1$

(イ)　$a = 1, b = 4, c = 3$

(問 4)　図 2 に示すような負帰還システムにおける伝達関数 $H_1(s) = \dfrac{Y_1(s)}{X_1(s)}$ を，制御器 $g(t)$ の伝達関数 $G(s)$ と $H_0(s)$ を用いて記せ．なお，$X_1(s)$，$Y_1(s)$ は $x_1(t)$，$y_1(t)$ のラプラス変換である．

(次のページに続く)

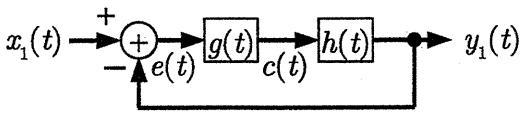

図 2: 負帰還システム

（問 5） $H_0(s)$ で $a=0$, $b=1$, $c=1$ として，負帰還 システムの入出力の関係が $y_1(t)=\dfrac{x_1(t)}{2}$ となるための一次進み系 $G(s)$ を求めよ．また，制御器の入力 $e(t)$ と出力 $c(t)$ の時間領域での関係を求めよ．なお，$e(0)=0$ とする．